数 学 年 刊
26A:2(2005),205–214.

仿射 Kac-Moody 李代数的生成元配对问题 ***

夏利猛* 林 磊**

提 要

本文讨论仿射 Kac-Moody 李代数的生成元配对问题. 对任意的 $X_l^{(k)}$ 型仿射 Kac-Moody 李代数 $g(A)$ 以及任意的非零虚根向量 x, 也证明了: 存在某个 $y \in g(A)$, 使得 $g'(A)$ 包含在由 x 和 y 所生成的李代数之中.

关键词 Kac-Moody 李代数, 虚根向量, 生成元
MR (2000) 主题分类 17B67, 17B20
中图法分类 O152.5
文献标识码 A
文章编号 1000-8314(2005)02-0205-10

在李代数的研究中, 讨论生成元的最小个数以及刻画最小生成元集的性质是一个重要而又有趣的问题. 文 [1] 证明了特征数为零的域 F 上的有限维半单李代数可以用两个元素来生成. 文 [2] 将这一结果推广到更一般的李代数 $g(A)$, 其中 A 是任意 $n \times n$ 的复矩阵. 假设 $\mathrm{Rank}(A) = l$, 则 $g(A)$ 可以由两个元素生成当且仅当 $l \geq n-2$. 当已知一个李代数 L 可由两个元生成时, 问对于 L 中任何一个给定的非零元 x, 是否存在某个 $y \in L$, 使得 L 可以由 x 和 y 生成? 对于有限维和复数域的情形, 文 [3] 证明了以下的结论:

在单李代数 L 中, 对于任意给定的非零元 x, 必存在 $y \in L$, 使得 x 和 y 生成 L.

L 是无限维时的情况如何呢? 文 [5] 中对于一些特殊情形得出了一些结果:

设 $g(A)$ 是一 Kac-Moody 代数. 对于 Cartan 子代数中任意给定的元 h, 如果 h 不在中心里, 或设 x_β 是任意实根向量, 则存在元素 y, 使得 $g'(A)$ 包含在由 $\{h, y\}$ 生成的, 或由 $\{x_\beta, y\}$ 生成的李子代数中.

文 [6] 证明了: 如果 A 是个 $X_l^{(1)}$ 型的广义 Cartan 矩阵, 其中 $X = A, B, C, D$, 则对任何虚根向量 x, 存在 $y \in g(A)$, 使得 $g'(A)$ 包含在由 $\{x, y\}$ 生成的李子代数中. 但是利用文 [6] 中的方法, 无法对一般仿射型李代数得出好的结果.

本文找到了一种新方法. 可将上述结论推广到一般的仿射型李代数上.

§1. 两个引理

引理 1.1 假设 L 是一个有限型的复单李代数, 那么对 Cartan 子代数 H 中的任何非零元 h, 存在一个素根系 Π, 使得对 $\forall\, \alpha_j, \alpha_k \in \Pi$, 如果

$$\alpha_j(h) + \alpha_k(h) = 0, \tag{1.1}$$

那么

$$\alpha_j(h) = \alpha_k(h) = 0. \tag{1.2}$$

本文 2004 年 8 月 3 日收到.

*华东师范大学数学系, 上海 200062; 河北大学数学与计算机学院, 河北 保定 071002.
E-mail: xialimeng@163.net
华东师范大学数学系, 上海 200062. **E-mail: llin@math.ecnu.edu.cn

***国家自然科学基金、教育部博士点学科基金、上海市重点学科和上海市科学技术委员会资助的项目.

万方数据

证 假设 $H_{\mathbf{R}}$ 是 H 的 $\mathbf{R}$- 型实空间，即

$$H \cong \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} H_{\mathbf{R}}, \quad H_{\mathbf{R}} \subseteq H, \tag{1.3}$$

则 h 具有唯一分解

$$h = h_1 + ih_2, \quad h_1, h_2 \in H_{\mathbf{R}}, \tag{1.4}$$

其中 $i = \sqrt{-1}$. 因此存在素根系 Π', 使得对 $\forall \alpha_j \in \Pi'$, 有 $\alpha_j(h_1) \geq 0$.

令

$$\Pi_1' = \{\alpha_j \mid \alpha_j(h_1) > 0\},$$

$$\Pi_2' = \{\alpha_j \mid \alpha_j(h_1) = 0\},$$

$$W_2 = \langle r_j \mid \alpha_j \in \Pi_2' \rangle,$$

则对 $\forall w \in W_2$, $\alpha \in \Pi_1'$, 有 $w(\alpha)(h_1) > 0$. 此外， W_2 是由 $\{e_i, f_i \mid \alpha_i \in \Pi_2'\}$ 所生成的李代数 L_2 的 Weyl 群. 假设 H_2 是 L_2 的 Cartan 子代数的 $\mathbf{R}$- 型实空间，那么

$$(H_2)^* = \bigoplus_{\alpha_i \in \Pi_2'} \mathbf{R}\alpha_i. \tag{1.5}$$

因为 Π_2' 的 Cartan 矩阵是正定矩阵，且它的秩有限，所以映射

$$f : H_2 \to ((H_2)^*)^*$$

$$f(h)(\alpha) = \alpha(h)$$

是双射. 事实上， h_2 定义了 $(H_2)^*$ 上的函数 ρ

$$\rho : \rho(\alpha) = \alpha(h_2),$$

于是，必存在唯一的 $h' \in H_2$, 使得对 $\forall \alpha \in (H_2)^*$, $\alpha(h_2 - h') = 0$. 由半单李代数的性质可知道存在 $w \in W_2$, 使得 h' 在由 $w(\Pi_2')$ 所确定的基本 Weyl 房中，即对 Π_2' 中的任何元 α, $w(\alpha)(h') \geq 0$. 因此

$$w(\alpha)(h_2) \geq 0, \forall \alpha \in \Pi_2'.$$

设 $\Pi = w(\Pi')$. 对任何 $w(\alpha_j), w(\alpha_k) \in \Pi$, 如果 $w(\alpha_j)(h) + w(\alpha_k)(h) = 0$, 那么

$$w(\alpha_j)(h_1) + w(\alpha_k)(h_1) = 0, \tag{1.6}$$

$$w(\alpha_j)(h_2) + w(\alpha_k)(h_2) = 0. \tag{1.7}$$

由 (1.6) 得， $\alpha_j, \alpha_k \in \Pi_2'$. 由 (1.7), 又可得 $w(\alpha_j)(h) = w(\alpha_k)(h) = 0$, 于是 Π 是素根系. 引理得证.

引理 1.2 假设 $\{s_1, \cdots, s_m\}$ 是一组复数，使得对所有 (i, j), $s_i + s_j = 0$ 当且仅当 $s_i = s_j = 0$.

定义矩阵 B 如下

$$\begin{bmatrix}
1 & s_1^{p-1}s_2 - s_1s_2^{p-1} & \cdots & s_1^{p-1}s_m - s_1s_m^{p-1} & s_2^{p-1}s_3 - s_2s_3^{p-1} & \cdots & s_{m-1}^{p-1}s_m - s_{m-1}s_m^{p-1} \\
-1 & s_1^{p-2}s_2^2 - s_1^2s_2^{p-2} & \cdots & s_1^{p-2}s_m^2 - s_1^2s_m^{p-2} & s_2^{p-2}s_3^2 - s_2^2s_3^{p-2} & \cdots & s_{m-1}^{p-2}s_m^2 - s_{m-1}^2s_m^{p-2} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{k+1} & s_1^{p-k}s_2^k - s_1^ks_2^{p-k} & \cdots & s_1^{p-k}s_m^k - s_1^ks_m^{p-k} & s_2^{p-k}s_3^k - s_2^ks_3^{p-k} & \cdots & s_{m-1}^{p-k}s_m^k - s_{m-1}^ks_m^{p-k} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
(-1)^{q+1} & s_1^{p-q}s_2^q - s_1^qs_2^{p-q} & \cdots & s_1^{p-q}s_m^q - s_1^qs_m^{p-q} & s_2^{p-q}s_3^q - s_2^qs_3^{p-q} & \cdots & s_{m-1}^{p-q}s_m^q - s_{m-1}^qs_m^{p-q}
\end{bmatrix},$$

万方数据

其中 $p=2q+1, q=m(m-1)+1$, 则存在向量 $v=(v_1,v_2,\cdots,v_q)$, 使得 $vB=(1,0,0,\cdots,0)$.

证 假设 $s_i\neq 0; s_i=s_j$ 当且仅当 $i=j$.

设矩阵 $D=(d_{kl})_{q\times q}$, 其中 $d_{kl}=\binom{k-1}{l-1}$, $k,\ l=1,\ \cdots,\ q$. 那么

$$DB=\begin{bmatrix} 1 & a_{1,2;1} & \cdots & a_{1,m;1} & a_{2,3;1} & \cdots & a_{m-1,m;1} \\ 0 & a_{1,2;2} & \cdots & a_{1,m;2} & a_{2,3;2} & \cdots & a_{m-1,m;2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{1,2;k} & \cdots & a_{1,m;k} & a_{2,3;k} & \cdots & a_{m-1,m;k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{1,2;q} & \cdots & a_{1,m;q} & a_{2,3;q} & \cdots & a_{m-1,m;q} \end{bmatrix},$$

这里 $a_{i,j;k}=(s_i+s_j)^{k-1}({s_i}^{p-k}s_j-{s_j}^{p-k}s_i)$. 因为 D 是可逆矩阵，所以如果引理对 DB 成立，则它对 B 也成立. 假设

$$B'=\begin{bmatrix} 1 & a'_{1,2;1} & \cdots & a'_{1,m;1} & a'_{2,3;1} & \cdots & a'_{m-1,m;1} & a''_{1,2;1} & \cdots & a''_{1,m;1} & a''_{2,3;1} & \cdots & a''_{m-1,m;1} \\ 0 & a'_{1,2;2} & \cdots & a'_{1,m;2} & a'_{2,3;2} & \cdots & a'_{m-1,m;2} & a''_{1,2;2} & \cdots & a''_{1,m;2} & a''_{2,3;2} & \cdots & a''_{m-1,m;2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{1,2;k} & \cdots & a'_{1,m;k} & a'_{2,3;k} & \cdots & a'_{m-1,m;k} & a''_{1,2;k} & \cdots & a''_{1,m;k} & a''_{2,3;k} & \cdots & a''_{m-1,m;k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{1,2;q} & \cdots & a'_{1,m;q} & a'_{2,3;q} & \cdots & a'_{m-1,m;q} & a''_{1,2;q} & \cdots & a''_{1,m;q} & a''_{2,3;q} & \cdots & a''_{m-1,m;q} \end{bmatrix},$$

其中 $a'_{i,j;k}=(s_i+s_j)^{k-1}{s_i}^{p-k}s_j$, $a''_{i,j;k}=-(s_i+s_j)^{k-1}{s_j}^{p-k}s_i$. 显然，如果存在向量

$$v=(v_1,v_2,\cdots,v_q),$$

使得

$$vB'=(1,0,0,\cdots,0)_q,$$

那么

$$vDB=(1,0,0,\cdots,0).$$

记

$$B'=(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{q-1}).$$

如果 $(\gamma_1,\cdots,\gamma_{q-1})$ 的秩等于 R, 则不失一般性，假设

$$\mathrm{Rank}(\gamma_1,\cdots,\gamma_R)=R.$$

再记 $B''=(\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_R)$. 如果引理对 B'' 成立，则它对 B' 也一定成立. 于是对 B 也成立. B'' 是如下形式的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_R \\ 0 & z_1\lambda_1 & \cdots & z_R\lambda_R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & z_1\lambda_1^{q-1} & \cdots & z_R\lambda_R^{q-1} \end{bmatrix},$$

这里的所有 z_i,λ_j 都不为 0. 由 $R<q$ 以及范德蒙行列式的性质易得：存在元素 v, 使得 $vB''=(1,0,0,\cdots,0)$, 于是引理成立.

万方数据

§2. 非扭情形的证明

设 g 是 X_l 型的有限维复单李代数，则存在 $X_l^{(1)}$ 型的仿射 Kac-Moody 代数 $g(A)$ 的一个实现

$$L(g)=\mathbf{C}[t,t^{-1}]\otimes g+\mathbf{C}c+\mathbf{C}d. \tag{2.1}$$

可知 $g'(A)=[L(g),L(g)]=\mathbf{C}[t,t^{-1}]\otimes g+\mathbf{C}c$. 因此，如果 $x\in L(g)$ 是一虚根向量，则 $x=t^k\otimes h$, 其中 k 是非零整数， h 是 g 的 Cartan 子代数 H 中的非零元. 由引理 1.1, 选择一个好的素根系 Π, 使得对 $\forall\alpha,\beta\in\Pi$, 有

$$\alpha(h)+\beta(h)=0\Leftrightarrow\alpha(h)=\beta(h)=0.$$

假定 $k>0$, 设

$$y=t^{-nk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}a_ie_i\Big)+\Big(\sum_{i=1}^{l}f_i\Big)+t\otimes h',$$

其中 $\{e_i,f_i\mid i=1,\cdots,l\}$ 是 g 的 Chevalley 生成集， $h_i:=[e_i,f_i]$, $h'\in H$, 且对任何 i 有 $\alpha_i(h')\neq 0$. 由半单李代数的性质我们知道这样的 h' 是存在的. 此处的非零复系数 a_i 待定. 假设 $n=2l(l-1)+3$, $q=l(l-1)+1$, 则 $n=2q+1$.

记 $y_j:=(adx)^j(y)$, $j=1,\cdots,n$, 则由 (1.4) 可得

$$\begin{aligned}y_j&=\sum_{i=1}^{l}(a_i(adx)^j(t^{-nk}\otimes e_i)+(adx)^j(f_i))+(adx)^j(t\otimes h')\\&=\sum_{i=1}^{l}(a_it^{jk-nk}\otimes(adh)^j(e_i)+t^{jk}\otimes(adh)^j(f_i))\\&=t^{jk-nk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^ja_ie_i\Big)+t^{jk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}(-\alpha_i(h))^jf_i\Big),\end{aligned}$$

再记

$$Y_j:=[y_j,y_{n-j}],\quad j=1,\cdots,q.$$

现在有

$$\begin{aligned}Y_j=&\Big[t^{jk-nk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^ja_ie_i\Big),t^{-jk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^{n-j}a_ie_i\Big)\Big]\\&+\Big[t^{jk-nk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^ja_ie_i\Big),t^{nk-jk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}(-\alpha_i(h))^{n-j}f_i\Big)\Big]\\&+\Big[t^{jk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}(-\alpha_i(h))^jf_i\Big),t^{-jk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^{n-j}a_ie_i\Big)\Big]\\&+\Big[t^{jk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}(-\alpha_i(h))^jf_i\Big),t^{nk-jk}\otimes\Big(\sum_{i=1}^{l}(-\alpha_i(h))^{n-j}f_i\Big)\Big]\\=&\Big(\sum_{1\le i<r\le l}a_ia_r(\alpha_i(h)^j\alpha_r(h)^{n-j}-\alpha_i(h)^{n-j}\alpha_r(h)^j)t^{-nk}\otimes[e_i,e_r]\Big)\end{aligned}$$

万方数据

$$+\Big(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^n(-1)^{n-j}h_i\Big)+\lambda_j c-\Big(\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^n(-1)^j h_i\Big)$$
$$+\Big(\sum_{1\le i<r\le l}(-1)^n(\alpha_i(h)^j\alpha_r(h)^{n-j}-\alpha_i(h)^{n-j}\alpha_r(h)^j)t^{nk}\otimes[f_i,f_r]\Big),$$

其中 λ_j 是某个与 j 有关的复数. 又因为 n 是奇数, 所以

$$Y_j=\Big(\sum_{i=1}^{l}2(-1)^{j+1}\alpha_i(h)^n h_i\Big)+\lambda_j c$$
$$+\sum_{1\le i<r\le l}(\alpha_i(h)^j\alpha_r(h)^{n-j}-\alpha_i(h)^{n-j}\alpha_r(h)^j)(a_ia_rt^{-nk}\otimes[e_i,e_r]-t^{nk}\otimes[f_i,f_r]).$$

设

$$\lambda=2\sum_{i=1}^{l}\alpha_i(h)^n h_i,$$
$$M_{i,r,j}=\alpha_i(h)^j\alpha_r(h)^{n-j}-\alpha_i(h)^{n-j}\alpha_r(h)^j,$$
$$E_{i,r}=a_ia_rt^{-nk}\otimes[e_i,e_r]-t^{nk}\otimes[f_i,f_r],$$

则

$$Y_j=(-1)^{j+1}\lambda+\lambda_j c+\sum_{1\le i<r\le l}M_{i,r,j}E_{i,r}.$$

由引理 1.2 知, 存在向量 $(v_1,\cdots,v_q)$, 使得

$$\lambda=\sum_{j=1}^{q}v_j(Y_j-\lambda_j c),$$

因而

$$\lambda'\coloneqq\lambda+\sum_{j=1}^{q}v_j\lambda_j c\in L(x,y).$$

记 $St_1\coloneqq\{i\mid\alpha_i(h)\neq 0\}$, 再记由 $\{e_i,f_i\mid i\in St_1\}$ 生成的李子代数为 $g(St_1)$, 则 $g(St_1)$ 是 g 的半单子代数, 且 $\lambda\in H\cap g(St_1)$, 易知存在非零复数集 $\{a_i\neq 0\mid i\in St_1\}$, 使得 $\alpha_i(\lambda)>0$ $(i\in St_1)$, 且这些 a_i 两两互不相等. 于是, $\alpha_i(\lambda')>0$ $(i\in St_1)$ 且它们两两互不相同. 确定这些 a_i, 然后用

$$(ad\lambda')^m(y_1)\quad(m=1,\cdots,2|St_1|),$$

线性地复合 $t^{k-nk}\otimes e_i$ 和 $t^k\otimes f_i$, 这里 i 取遍 St_1 中所有元. 则通过 x 的作用, 有

$$t^{qk-nk}\otimes e_i,\quad t^{qk}\otimes f_i\in L(x,y),\quad\forall q\in\mathbf{N}.$$

特别地, $h_i+kc=[t^{-k}\otimes e_i,t^k\otimes f_i]$, 和 $h_i+2kc=[t^{-2k}\otimes e_i,t^{2k}\otimes f_i]$ 都在 $L(x,y)$ 中, 故 $h_i,c\in L(x,y)$.

如果 $St_1\neq\{1,\cdots,l\}$, 记 $x_1\coloneqq t^k\otimes h^*$, 其中

$$h^*=\sum_{i\in St_1}m_ih_i,\quad m_i>0,$$

万方数据

且存在 $i_0 \notin St_1$, 使 $\alpha_{i_0}(h^*) \neq 0$, 那么

$$[x_1, y] = t^{k-nk} \otimes \left(\sum_{i=1}^{l} \alpha_i(h^*) a_i e_i\right) + t^k \otimes \left(\sum_{i=1}^{l} (-\alpha_i(h^*)) f_i\right).$$

但是对 $\forall i \in St_1$, 有 $t^{k-nk} \otimes e_i \in L(x,y), t^k \otimes f_i \in L(x,y)$. 设 $St_2 := \{i \notin St_1 \mid \alpha_i(h^*) < 0\}$, 如果存在某个 $i_0 \notin St_1 \cup St_2$, 则 $\alpha_{i_0}(h^*) = 0$, 于是

$$t^{k-nk} \otimes \left(\sum_{i \in St_2} \alpha_i(h^*) a_i e_i\right) + t^k \otimes \left(\sum_{i \in St_2} (-\alpha_i(h^*)) f_i\right) \in L(x,y),$$

置

$$y_1' = t^{k-nk} \otimes \left(\sum_{i \in St_2} \alpha_i(h^*) a_i e_i\right) + t^k \otimes \left(\sum_{i \in St_2} (-\alpha_i(h^*)) f_i\right),$$

定义 $y_{j+1}' = [x_1, y_j']$, $j = 1, \cdots, n-1$, $Y_j' = [y_j', y_{n-j}']$, $j = 1, \cdots, q$. 同理可确定每个 $a_i, (i \in St_2)$, 从而

$$h_i \in L(x,y), \quad \forall i \in St_2.$$

重复上述过程，因为 Π 是有限集，所以在经过了有限次 (不妨设为 m 次) 后，可得

$$\bigcup_{r=1}^{m} St_r = \{1, \cdots, l\},$$

于是对 $\forall i \in \{1, \cdots, l\}$, $h_i \in L(x,y)$, 从而对 $\forall i$, 有 $f_i, t^{-nk} \otimes e_i, t \otimes h' \in L(x,y)$. 因此

$$(\alpha_i(h'))^{nk} e_i = (adt \otimes h')^{nk} (t^{-nk} \otimes e_i) \in L(x,y).$$

因为 $(\alpha_i(h'))^{nk} \neq 0$, 所以 $e_i \in L(x,y)$, $\forall i \in \{1, \cdots, l\}$, 于是

$$g = \langle e_i, f_i \mid i = 1, \cdots, l \rangle, \quad t \otimes g = \langle g, t \otimes h' \rangle \subseteq L(x,y).$$

由 $t^{-nk} \otimes e_i \in L(x,y)$ 得到,

$$t^{-nk} \otimes g \subseteq \langle g, t^{-nk} \otimes e_i \rangle \subseteq L(x,y).$$

所以 $t^{-1} \otimes g \subseteq \langle t \otimes g, t^{-nk} \otimes g \rangle \subseteq L(x,y)$, 且

$$g'(A) \subseteq \langle t \otimes g, g, t^{-1} \otimes g \rangle \subseteq L(x,y). \tag{2.2}$$

用类似的方法对 $k < 0$ 的情形讨论，可得同样的结论. 因此有

定理 2.1 对任何非扭仿射 Kac-Moody 李代数 $g(A)$ 以及它的任何虚根向量 x, 存在元素 $y \in g(A)$, 使得 $g'(A)$ 包含在由 $\{x, y\}$ 生成的子代数中.

§3. 扭数等于 2 的情形

回忆一下 $X_l^{(2)}$ 型仿射李代数的实现

$$\mathbf{C}[t^2, t^{-2}] \otimes g_0 + t\mathbf{C}[t^2, t^{-2}] \otimes g_1 + \mathbf{C}c + \mathbf{C}d, \tag{3.1}$$

其中 $g_0 + g_1 = g$ 是 X_l 型的有限维复单李代数，g_0 是 g 的单子代数，g_1 是单 g_0- 模. 此时

$$g'(A) = \mathbf{C}[t^2, t^{-2}] \otimes g_0 + t\mathbf{C}[t^2, t^{-2}] \otimes g_1 + \mathbf{C}c.$$

如果 $x = t^{2k} \otimes h$ 是个根向量，那么 h 落在 g_0 的 Cartan 子代数中. 如果 g_0 是 Y_l 型的，容易证明

$$L = \mathbf{C}[t^2, t^{-2}] \otimes g_0 + \mathbf{C}c + \mathbf{C}d$$

万方数据

是 $Y_l^{(1)}$ 型的仿射李代数，且 $x \in L$. 由定理 2.1, 存在 $y' \in L$, 使得 $L^{(1)} \subseteq L(x, y')$. 设

$$y = y' + t \otimes h',$$

其中 $h' \in H \cap g_1, h' \neq 0$. 因为 x 与 $t \otimes h'$ 交换，且由上述证明可知

$$L^{(1)} \subseteq \sum_{j \geq 2} V^j,$$

这里

$$V = \mathbf{C}x + \mathbf{C}y' = V^1, V^j = \sum_{\substack{r,s \geq 1 \\ r+s=j}} [V^r, V^s], \ \forall j \geq 2,$$

于是，对 $\forall j \geq 2$, 有 $V^j \subseteq L(x, y)$, 由 $L^{(1)} \subseteq L(x, y)$,

$$t \otimes h' = y - y' \in L(x, y).$$

又因为 g_1 是单 g_0- 模，所以

$$t^{-1} \otimes g_1 \subseteq \langle t \otimes h', t^{-2} \otimes g_0 \rangle,$$

因此

$$g'(A) \subseteq \langle t^{-1} \otimes g_1, L^{(1)} \rangle \subseteq L(x, y). \tag{3.2}$$

如果 $x = t^{2k-1} \otimes h$, 则 h 属于 $g_1 \cap H$, 显然 $(adh)^2$ 在 g_0 上的作用是可对角的，因此存在 $h_\mu \in g_0 \cap H$, 使得 $(adh_\mu - (adh)^2)(g_0) = 0$. 特别地，可设

$$x_1 = t^{4k-2} \otimes h_\mu,$$

则

$$[x_1, b] - [x, [x, b]] \in \mathbf{C}c,$$

对所有 $b \in L$ 成立，于是存在元素 $y \in L$, 满足 $L^{(1)} \subseteq L(x_1, y)$. 但是

$$L^{(1)} \subseteq \sum_{j \geq 2} V^j,$$

其中

$$V = \mathbf{C}x + \mathbf{C}y = V^1, \quad V^j = \sum_{\substack{r,s \geq 1 \\ r+s=j}} [V^r, V^s], \quad \forall j \geq 2,$$

且 $c \in L^{(1)}$, 因此 $L^{(1)} \subseteq L(x, y)$. 因为 $x \in L(x, y)$, 所以

$$t^{2k-1} \otimes g_1 \subseteq \langle g, x \rangle \subseteq L(x, y),$$

于是

$$g'(A) \subseteq \langle L^{(1)}, t^{2k-1} \otimes g_1 \rangle \subseteq L(x, y). \tag{3.3}$$

由 (2.2) 和 (3.1) 即可得

定理 3.1 对任何扭数 $k = 2$ 的仿射 Kac-Moody 李代数 $g(A)$ 以及任意虚根向量 x, 存在元素 $y \in g(A)$, 使得 $g'(A)$ 包含在由 $\{x, y\}$ 生成的子代数中.

§4. 扭数等于 3 的情形

如果 $g(A)$ 是扭数为 3 的仿射李代数，那么它一定是 $D_4^{(3)}$ 型的，它有以下的实现：

$$\left(\sum_{i \in \mathbf{Z}} t^{3i} \otimes g_0\right) + \left(\sum_{i \in \mathbf{Z}} t^{3i+1} \otimes g_1\right) + \left(\sum_{i \in \mathbf{Z}} t^{3i-1} \otimes g_2\right) + \mathbf{C}c + \mathbf{C}d, \tag{4.1}$$

万方数据

其中 $g_0+g_1+g_2$ 是 D_4 型的复单李代数，g_0 是 $g(A)$ 的 G_2 型单子代数，而 g_1 和 g_2 是同构的单 g_0- 模. 类似地，

$$G=\Big(\sum_{i\in\mathbf{Z}}t^{3i}\otimes g_0\Big)+\mathbf{C}c+\mathbf{C}d$$

是非扭的仿射 Kac-Moody 代数且它是 $G_2^{(1)}$ 型的. 此时

$$g'(A)=\left(\sum_{i\in\mathbf{Z}}t^{3i}\otimes g_0\right)+\left(\sum_{i\in\mathbf{Z}}t^{3i+1}\otimes g_1\right)+\left(\sum_{i\in\mathbf{Z}}t^{3i-1}\otimes g_2\right)+\mathbf{C}c.$$

如果 $x\in G$, 那么存在 $y'\in G$, 使得

$$G^{(1)}\subseteq L(x,y').$$

设 $h'\in g_1\cap H$, $y=y'+t\otimes h'$. 因为 x 与 $t\otimes h'$ 交换，所以 $G^{(1)}\subseteq L(x,y)$. 因此 $t\otimes h'\in L(x,y)$. 但是 g_1 是单 g_0- 模，故

$$t^{3i+1}\otimes g_1\subseteq L(x,y),\quad \forall i\in\mathbf{Z},$$

并且

$$0\neq[t^{3i-2}\otimes g_1,t\otimes g_1]\subseteq t^{3i-1}\otimes g_2.$$

由于 g_2 也是单 g_0- 模，所以

$$t^{3i-1}\otimes g_2\subseteq L(x,y),\quad \forall i\in\mathbf{Z}.$$

于是

$$g'(A)\subseteq L(x,y).$$

如果存在某个 i, 使得

$$x=t^{3i+1}\otimes h,$$

那么 $h\in g_1\cap H$. 首先讨论 $i\geq 0$ 的情形. 因为 g 的 Cartan 子代数是 4 维的，所以 g_0 的 Cartan 子代数是 2 维的，且 g_1 与 g_2 作为 g_0- 模是同构的，于是 $\dim(H\cap g_1)=1$. 设 $\omega=e^{2\pi\sqrt{-1}/3}$, g 的 Chevalley 生成元为

$$\{e_i,f_i\mid i=1,2,3,4\},$$

$$h_i=[e_i,f_i],\quad i=1,2,3,4,$$

且 e_1,e_3,e_4 是两两交换的. 于是 $h=K(h_1+\omega h_3+\omega^2h_4)$, 且可假设 $K=1$. 又设

$$y=e_2+f_2+t^{-9(3i+1)}\otimes(e_1+e_3+e_4)+(f_1+f_3+f_4)+t\otimes h.$$

令 $y_j:=(adx)^j(y)$, 那么

$$y_3=8t^{-6(3i+1)}\otimes(e_1+e_3+e_4)-t^{3(3i+1)}\otimes(f_1+f_3+f_4),$$

$$y_6=64t^{-1(3i+1)}\otimes(e_1+e_3+e_4)+t^{6(3i+1)}\otimes(f_1+f_3+f_4),$$

$$[y_3,y_6]=72(h_1+h_2+h_3+K'c),$$

所以 $\lambda=h_1+h_2+h_3+K'c\in L(x,y)$. 令

$$y^j:=(ad\lambda)^j(y),$$

万方数据

则 $e_2, f_2, t^{-9(3i+1)} \otimes (e_1+e_3+e_4), (f_1+f_3+f_4)$ 都可由 y^1, y^2, y^3, y^4 线性表出

$$\frac{1}{90}(12y^1-4y^2-3y^3+y^4)=e_2,$$

$$-\frac{1}{90}(12y^1+4y^2-3y^3-y^4)=f_2,$$

$$\frac{1}{40}(18y^1+9y^2-2y^3-y^4)=t^{-9(3i+1)}\oplus(e_1+e_3+e_4),$$

$$-\frac{1}{40}(18y^1-4y^2-2y^3+y^4)=f_1+f_3+f_4,$$

即它们都属于 $L(x,y)$, 于是 $t\otimes h$ 也属于 $L(x,y)$ 中. 又因为

$$(adx)^9(t^{-9(3i+1)}\otimes(e_1+e_3+e_4))=2^9(e_1+e_3+e_4),$$

$$(ad(t\otimes h))^{9(3i+1)-1}(t^{-9(3i+1)}\otimes(e_1+e_3+e_4))=2^{9(3i+1)-1}t^{-1}\otimes(e_1+\omega^2e_3+\omega e_4),$$

所以

$$g_0=\langle e_1+e_3+e_4, f_1+f_3+f_4, e_2, f_2\rangle\subseteq L(x,y),$$

$$t\otimes h\in t\otimes g_1\cap L(x,y)\neq 0,$$

$$t^{-1}\otimes(e_1+\omega^2e_3+\omega e_4)\in(t^{-1}\otimes g_2)\cap L(x,y)\neq 0,$$

于是

$$t\otimes g_1,\quad t^{-1}\otimes g_2\subseteq L(x,y).$$

因此

$$g'(A)\subseteq\langle g_0, t\otimes g_1, t^{-1}\otimes g_2\rangle\subseteq L(x,y). \tag{4.2}$$

对于 $i<0$ 的情形有同样的结论. 如果

$$x=t^{3i-1}\otimes h,$$

那么 $h\in g_2$, 其证明与上述证明类似. 于是有

定理 4.1 假设 $g(A)$ 是扭数 $k=3$ 的仿射 Kac-Moody 李代数, x 是它的任意虚根向量, 则存在 $y\in g(A)$, 使得 $g'(A)$ 包含在由 $\{x,y\}$ 所生成的子代数中.

将定理 2.1, 定理 3.1 和定理 4.1 加以合并, 有

定理 4.2 假设 $g(A)$ 是任意仿射 Kac-Moody 李代数, x 是其任意虚根向量, 则存在 $y\in g(A)$, 使得 $g'(A)$ 包含在由 $\{x,y\}$ 生成的子代数中.

参　考　文　献

[1] Kuranishi, M., On everywhere dense imbeddings of free groups in Lie groups [J], *Nagoya Math J.*, **2**(1951), 63–71.

[2] Lu, C. H. & Wan, Z. X., On the minimal number of generators of the Lie algebras $g(A)$ [J], *Journal of Algebra*, **101**(1986), 470–472.

[3] Ionescu, T., On the generators of semi-simple Lie algebras [J], *Linear Algebra and its Applications*, **15**(1976), 271–292.

[4] Kac, V. G., Infinite Dimensional Lie Algebras [M], Birkhäuser, Boston, 1983.

[5] 卢才辉, Kac-Moody 代数 $g(A)$ 的生成元配对问题 [J], 科学通报, **43**(1998), 242–247.

[6] Xu, H. X. & Lu, C. H., Pairing problem of generators in non-twisted affine Lie algebras [J], *Northeast Mathematics*, **17**(2001), 111–119.

万方数据

[7] 万哲先, Kac-Moody 代数导引 [M], 科学出版社, 北京, 1993.
[8] 孟道骥, 复半单李代数引论 [M], 北京大学出版社, 北京, 1998.

PAIRING PROBLEM OF GENERATORS IN AFFINE KAC-MOODY LIE ALGEBRAS

XIA Limeng* LIN Lei**

*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China; Mathematics & Computer College of Hebei University, Baoding 071002, Hebei, China. **E-mail:** xialimeng@163.net

Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China. **E-mail: llin@math.ecnu.edu.cn

Abstract

This paper discusses the pair problem of generators in affine Kac-Moody Lie algebras. For any affine Kac-Moody algebra $g(A)$ of $X_l^{(k)}$ type and arbitrary nonzero imaginary root vector x, the authors prove that there exists some $y \in g(A)$, such that $g'(A)$ is contained in the Lie algebra generated by x and y.

Keywords Kac-Moody algebra, imaginary root vector, generator

2000 MR Subject Classification 17B67, 17B20

The English translation of this paper will be published in
Chinese Journal of Contemporary Mathematics, Vol.26 No.2, 2005
by ALLERTON PRESS, INC. NEW YORK, USA

万方数据