方阵的伴随矩阵*

林 磊 (华东师范大学数学系 上海 200062)

摘 要 列述伴随矩阵的19条性质,对其中某些性质进行了证明和讨论。

关键词 伴随矩阵;可逆矩阵;正交矩阵;正定矩阵 **中图分类号** O152.21

方阵的伴随矩阵是在求可逆方阵的逆矩阵时提出来的。假设 $A=(a_{ij})$ 是数域 K 上的 n 阶方阵 $(n\geqslant 2)$,即 $A\in M_n(K)$。定义 A 的伴随矩阵 A^* 为

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 则 $AA^*=A^*A=|A|E_n$。

首先,我们罗列一下伴随矩阵的一些简单性质:

(P1) A 可逆当且仅当 A^* 可逆。

(P2) 如果 A 可逆,则 $A^*=|A|A^{-1}$。

(P3) $\operatorname{rank}(A^*)=\begin{cases} n, 若\ \operatorname{rank}(A)=n, \\ 1, 若\ \operatorname{rank}(A)=n-1, \\ 0, 若\ \operatorname{rank}(A)<n-1。\end{cases}$

(P4) $|A^*|=|A|^{n-1}$。

(P5) 对 $k\in K$, $(kA)^*=k^{n-1}A^*$。

(P6) 如果 A 可逆,则 $(A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$。

(P7) $(A^T)^*=(A^*)^T$. 从而若 A 是对称矩阵,则 A^* 也是对称矩阵。

(P8) $(A^*)^*=\begin{cases} |A|^{n-2}A, 若\ n>2, \\ A, 若\ n=2。\end{cases}$

(P9) $(AB)^*=B^*A^*$。

(P10) 若 A 与 B 相似,则 A^* 与 B^* 也相似。

(P11) 若 A 是正交矩阵,则 A^* 也是正交矩阵。

(P12) 若 A 对合(即 $A^2=E_n$),则 A^* 也对合。

(P13) 若 A 是正定矩阵,则 A^* 也是正定矩阵。

上述性质大都是一些标准的结果,证明也大都比较简单。

对于(P8), $n=2$ 时可由定义得到。$n>2$ 时,若 A 可逆,则由(P2)即可得。而当 A 不可逆时,利用(P3)即得。

* 收稿日期:2002—12—23。
基金项目:教育部"高等代数与解析几何"创名牌课程项目资助。

万方数据

(P10) 可由相似的定义以及(P9)、(P1) 和(P6) 得到。(P11)、(P12) 的证明也与(P10) 类似。

在这些性质中,(P9) 的证明相对较难,通常采用的方法为:

(方法一) 第一步:若 A,B 均可逆,则由(P2) 以及逆的性质即得。

第二步:若 B 可逆,而 A 不可逆. 则以 kE_n+A 代替 A,其中 $k\in K$. 那么使得 $|kEn_n+A|=0$ 的 k 的值只有有限多个。对使得 $kEn+A$ 非退化的 k,有 $[(kE_n+A)B]^*=B^*(kE_n+A)^*$。设等式两边的矩阵 (i,j) - 位置的元分别为 $f_{ij}(k)$ 和 $g_{ij}(k)$,则它们都是关于 k 的多项式。而多项式 $f_{ij}(k)-g_{ij}(k)$ 有无限多个零点,所以它只能是零多项式. 从而 $f_{ij}(0)-g_{ij}(0)=0$,对所有 i,j. 于是 $(AB)^*=B^*A^*$。

第三步:当 B 不可逆时,对 B 采用第二步的方法也可得到 $(AB)^*=B^*A^*$。

(方法二) 用初等的方法证明。A,B 可逆时如方法一。而当 $\mathrm{rank}(A)<n-1$ 时,显然有 $(AB)^*=B^*A^*=0$。

故不妨设 $\mathrm{rank}(A)=n-1$,则存在初等矩阵 $P_1,\cdots,P_s,Q_1,\cdots,Q_t$,使得

$$A=P_1\cdots P_sA_1Q_1\cdots Q_t,\text{这里 } A_1=\mathrm{diag}(E_{n-1},0)。$$

直接验算可知若 P 是任意初等矩阵,C 是任意方阵,则 $(PC)^*=C^*P^*$,$(A_1C)^*=C^*A_1^*$。

于是

$$\begin{aligned}(AB)^*&=[P_1(P_2\cdots P_sA_1Q_1\cdots Q_tB)]^*=(P_2\cdots P_sA_1Q_1\cdots Q_tB)^*P_1^*=\cdots=\\&(A_1Q_1\cdots Q_tB)^*P_s^*\cdots P_1^*=(Q_1\cdots Q_tB)^*A_1^*P_s^*\cdots P_1^*=\cdots=\\&B^*Q_t^*\cdots Q_1^*A_1^*P_s^*\cdots P_1^*。\end{aligned}$$

但是

$$\begin{aligned}Q_t^*\cdots Q_1^*A_1^*P_s^*\cdots P_1^*&=(Q_1\cdots Q_t)^*A_1^*P_s^*\cdots P_1^*=(A_1Q_1\cdots Q_t)^*\cdots P_1^*=\\&(P_sA_1O_1\cdots Q_t)^*P_{s-1}^*\cdots P_1^*=\cdots=(P_1\cdots P_sA_1Q_1\cdots Q_t)^*=A^*。\end{aligned}$$

于是,$(AB)^*=B^*A^*$。

(方法三) 用高等方法证明。设 $x_{ij},y_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$ 是域 K 上 $2n^2$ 个独立的未定元,$R=K[x_{ij},y_{ij}\mid i,j=1,\cdots,n]$ 是 K 上 $2n^2$ 个未定元的多项式环,$A_1=(x_{ij})$,$B_1=(y_{ij})$,则 $A_1,B_1\in M_n(R)$。令 F 是 R 的商域,那么 A_1,B_1 作为 F 上的矩阵是可逆的,从而 $(A_1B_1)^*=B_1^*A_1^*$。而由伴随矩阵的定义,上式两边的伴随矩阵中的元显然都属于 R。因此 $(A_1B_1)^*,A_1^*,B_1^*\in M_n(R)$。于是对于任意的 $A=(a_{ij})$,$B=(b_{ij})\in M_n(K)$,取 x_{ij},y_{ij} 的值分别为 a_{ij} 和 b_{ij},$1\leqslant i,j\leqslant n$,则同样有 $(AB)^*=B^*A^*$。□

上述三个方法中,方法二最初等,它不仅对数域 K 成立,对任意域 K 也同样成立。方法一有一定的技巧性,且对系数域 K 有要求,需要 K 含无限多个元素。所以 K 可以是数域或任何无限域。方法三的证明最简单,但要用到近世代数的工具。不过从证明中可看出 K 可以是任意的域。事实上,适当处理后我们可以证明若 K 是任意有单位元的交换环,则上述结论也同样成立。

下面我们讨论另一个问题:任意给出一个矩阵 $B\in M_n(K)$,是否存在 $A\in M_n(K)$,使得 $A^*=B$?如果这样的 A 存在,则 A 是否唯一?由(P3) 可知这样的 A 并不一定存在。但是,由(P8) 容易得到:

(P14) 若 $B\in M_2(K)$,则存在唯一的 $A\in M_2(K)$,使得 $A^*=B$。

但对于一般的 n,问题就比较复杂了。我们分情况来讨论。

(P15) 设 $B\in M_n(\mathbf{C})$,且 B 可逆,则存在 $A\in M_n(\mathbf{C})$,使得 $A^*=B$. 并且存在 $A_1\in M_n(\mathbf{C})$ 使得 $A_1^*=B$ 的充要条件是存在 $k\in\mathbf{C}$,$k^{n-1}=1$,使得 $A_1=kA$。

证明 取 $A=\sqrt[n-1]{|B|}B^{-1}$,则由(P2),(P5),(P6) 得 $A^*=B$。

若另有 $A_1\in M_n(\mathbf{C})$,使得 $A_1^*=B$,则 $A_1^*=A^*$,于是 $|A_1|A_1^{-1}=|A|A^{-1}$,从而 $A_1=|A_1|\cdot|A|^{-1}A$。令 $k=|A_1|\cdot|A|^{-1}\in\mathbf{C}$,则 $A_1=kA$. 且由于 $A_1^*=(kA)^*=A^*$,故 $k^{n-1}A^*=A^*$. 所以

万方数据

$k^{n-1}=1$。

反之,如果 $k\in\mathbf{C}$ 满足 $k^{n-1}=1$,则 $(kA)^*=k^{n-1}A^*=A^*=B$。□

从该性质可以看出,(P13) 的逆一般不成立. 但若 A^* 正定,则 A 是正定或负定的。

(P15′) 若 $B\in M_{2n}(\mathbf{R})$,且 B 可逆,则存在唯一的 $A\in M_{2n}(R)$,使得 $A^*=B$。

(P16) 设 $B\in M_n(\mathbf{C})$,且 $\operatorname{rank}(B)=1$,则存在无限多个 $A\in M_n(\mathbf{C})$,使得 $A^*=B$。

证明　设 $B\in M_n(\mathbf{C})$,$\operatorname{rank}(B)=1$,则 B 或者相似于

$$B_1=\operatorname{diag}(b,0,\cdots,0),\qquad 0\neq b\in\mathbf{C},$$

或者相似于

$$B_2=\operatorname{diag}(J,0_{n-2}),\qquad \text{这里 } J=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}。$$

如果 B 相似于 B_1,则有可逆矩阵 $T\in M_n(\mathbf{C})$,使得 $B=T^{-1}B_1T$。由 ($P15$),存在可逆矩阵 $\mathbf{C}\in M_n(\mathbf{C})$,使得 $C^*=T^{-1}$。令 $A_1=\operatorname{diag}(0,b,1,\cdots,1)$,那么 $A_1^*=B_1$。取 $A=C^{-1}A_1C$,那么

$$A^*=(C^{-1}A_1C)^*=C^*A_1^*(C^{-1})^*=T^{-1}B_1(C^*)^{-1}=T^{-1}B_1T=B。$$

若 B 相似于 B_2,即有可逆 $T\in M_n(\mathbf{C})$,使得 $B=T^{-1}B_2T$。那么同样存在 $C\in M_n(\mathbf{C})$,使得 $C^*=T^{-1}$。令 $A_2=\operatorname{diag}(-J,E_{n-2})$,那么 $A_2^*=B_2$。取 $A=C^{-1}A_2C$,则 $A^*=B$。

此外,对于第一种情况,若以 $A_1+kE_{2,n}$ 代替 A_1(其中 $k\in\mathbf{C}$,$E_{i,j}$ 表示 (i,j) - 位置元为 1,其余位置元为 0 的 n 阶方阵),则同样有 $A_1^*=B_1$,所以这样的 A 有无限多个. 对于第二种情况,如果以 $A_2+kE_{3,n}$ 代替 A_2,同样有 $A_2^*=B_2$,所以这样的 A 也有无限多个。□

注意到当数域不是 $\mathbf{C}$ 时($P15$) 中的 A 不一定存在。例如:取 $B=\operatorname{diag}(-1,1,1)\in M_3(\mathbf{R})$,则存在 $A=\operatorname{diag}(-i,i,i)\in M_3(\mathbf{C})$,使得 $A^*=B$. 据($P15$),满足 $X^*=B$ 的解只有 A 与 $-A$。但显然 A 与 $-A$ 都不属于 $M_3(\mathbf{R})$。

(P17) 设 $A\in M_n(K)$,$f(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 是 A 的特征多项式。令 $g(\lambda)=(-1)^{n-1}(\lambda^{n-1}+a_{n-1}\lambda^{n-2}+\cdots+a_2\lambda+a_1)$,那么 $A^*=g(A)$。

证明　我们先对 A 是可逆的情况来证明. 此时,$a_0=(-1)^n|A|\neq 0$. 所以由哈密尔顿 - 凯莱定理,

$$A^{-1}=-\frac{1}{a_0}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1E_n)。$$

于是

$$A^*=|A|\cdot A^{-1}=(-1)^na_0\left(-\frac{1}{a_0}\right)(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1E_n)=$$
$$(-1)^{n-1}(A^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+\cdots+a_1E_n)。$$

即,$A^*=g(A)$。

对于一般的 A,可以用(P9) 证明中方法三的类似办法来证明。□

以下性质是(P17) 的简单推论.

(P18) 若 $AB=BA$,则 $A^*B=BA^*$。

最后,我们给出一个伴随矩阵与分块矩阵的关系,它可由伴随矩阵的定义直接得出。

(P19) 设 $A=\operatorname{diag}(A_1,\cdots,A_m)$,其中每个 A_i 都是方阵,则

$$A^*=\operatorname{diag}(k_1A_1^*,k_2A_2^*,\cdots,k_mA_m^*),$$

这里,$k_i=|A_1|\cdots|A_{i-1}|\cdot|A_{i+1}|\cdots|A_m|$,$i=1,2,\cdots,m$。

万方数据