文章编号:1000－5641(2003)03－0001－08

最简线状李代数

林　磊
(华东师范大学 数学系,上海　200062)

摘要: 作者定义了一类线状李代数,即所谓的最简线状李代数,它是一类结构最简单的线状李代数,也是 Luis Boza, Francisco J. Echarte 和 Juan Nunez 在 1994 年对复数域上的 10 维线状李代数的分类中所提到的参数全为零的代数 μ_{10}^{130} 的推广。设 g 是域 F 上的 n 维最简线状李代数 ($n\geqslant 4$),确定了 g 的导子代数,并且证明了当 F 的特征为 0 或 $p>n-2$ 时 g 的导子代数是可解的完备李代数。

还计算了 g 的自同构群,并证明了当 $|F|\geqslant n$ 时它是一个无中心的可解群。此外,对于素特征的情形,还考虑了 g 可限制的充要条件,并对非可限制的情形确定了 g 的极小 p－包络。

关键词: 线状李代数;　完备李代数;　模李代数
中图分类号: O152　　**文献标识码:** A

1　定　　义

在有限维李代数的研究中,幂零李代数的研究一直占据着重要的地位。然而,目前甚至对于有限维复幂零李代数的分类问题的解决也远没有完成。我们仅仅得到了一些低维的幂零李代数的分类结果。线状李代数是一类特殊的幂零李代数,近年来得到了一些较好的研究结果,已经解决了不大于 10 维的复线状李代数的分类问题(参见[1],[2])。完备李代数是近十多年来国内研究得比较热门的课题,但基本上限于特征零的李代数。本文的主要目的是通过研究一类形式最简单的线状李代数的导子代数,来得到两类可解完备李代数,但是它们的基域不限于特征零。此外,我们还研究了这种代数的其他性质,例如:它的自同构群;在模的情形,它是可限制的充要条件以及非可限制时它的极小 p－包络等等。

设 F 是一个域,g 是域 F 上的 n 维幂零李代数,g 被称为是一个线状李代数(filiform Lie algebra)如果其降中心列$\{g^i\}$的维数满足 $\dim g^i=n-i-1(i\geqslant 1)$(参见[1])。

1.1　定义　设 g 是 F 上的 n 维($n\geqslant 3$)线状李代数,如果 g 拥有一个基$\{e_i\}$,满足

$$\begin{aligned}&[e_1,e_j]=e_{j-1},(3\leqslant j\leqslant n)\\&[e_2,e_j]=0,(1\leqslant j\leqslant n)\\&[e_3,e_j]=0,(4\leqslant j\leqslant n)\end{aligned}\tag{1.1}$$

并且基中其他元素之间的李括号全为零,那么称 g 为 n 维最简线状李代数。

1.2　注　对于任意的 n 维复线状李代数 g,总存在满足条件(1.1)的基,这样的基称为适应基(adapted basis)(参见[1])。最简线状李代数是[1]中满足法则 μ_{10}^{130} 的 10 维线状李代数的

收稿日期:2001－12
基金项目:国家自然科学基金(10271047);教育部博士点基金(20020269017)和上海市重点学科建设项目资助
作者简介:林　磊(1960－),男,副教授.

万方数据

推广。

1.3 定理 设 g 是域 F 上的 n 维最简线状李代数，e_1，e_2，…，e_n 是它的适应基，定义线性映射 φ 如下

$$g \to gl(n,F)$$

$$e_1 \to \sum_{i=1}^{n-2} E_{i,i+1};$$

$$e_{i+1} \to E_{in},\ i=1,2,\cdots,n-1,$$

其中 E_{ij} 是 (i,j) 位置上为 1，其余位置上为 0 的 n 阶方阵，则 φ 是李代数的单一同态。

定理 1.3 实际上提供了最简线状李代数的一种实现。

2 最简线状李代数的导子代数

在这一节和下一节的讨论中，我们总假设最简线状李代数 g 的维数 $n \geqslant 4$。

本节中我们主要讨论最简线状李代数 g 的导子代数 Der g。

2.1 定理 设 g 是域 F 上的 $n(\geqslant 4)$ 维最简线状李代数。设 $D \in$ Der g，那么

$$\begin{aligned} D(e_1) &= \sum_{i=1}^{n} a_i e_i, \\ D(e_j) &= (n-j)a_1 e_j + \sum_{i=2}^{j} b_{i+n-j} e_i,\ 2 \leqslant j \leqslant n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

这里，a_i，$b_j \in F$。反之，任给 $a_1,\cdots,a_n$，b_2，…，$b_n \in F$，则由公式(2.1)所确定的 g 上的线性变换 $D \in$ Der g。

证明 如果 $D \in$ Der g，设

$$D(e_1) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i,\ D(e_n) = \sum_{i=1}^{n} b_i e_i。$$

则由 $e_{n-1} = [e_1, e_n]$ 得

$$D(e_{n-1}) = [D(e_1), e_n] + [e_1, D(e_n)] = a_1 e_{n-1} + \sum_{i=2}^{n-1} b_{i+1} e_i。$$

一般地，对 $n-j$ 使用数学归纳法，并注意到 $e_j = [e_1, e_{j+1}]$，可得

$$D(e_j) = (n-j)a_1 e_j + \sum_{i=2}^{j} b_{i+n-j} e_i,\ j=2,\cdots,n-1. \tag{2.2}$$

又因为 $[e_n, e_3]=0$，所以

$$0 = D[e_n, e_3] = [D(e_n), e_3] + [e_n, D(e_3)] = b_1 e_2.$$

因此，$b_1=0$。于是(2.2)式对 $j=n$ 仍成立，即(2.1)式成立。

反过来，直接验证可知由(2.1)定义的线性变换 D 都是 g 的导子。□

2.2 推论 dim Der $g=2n-1$。设 Int(g) 是由 g 的所有内导子组成的 Der g 的李子代数，则 dim Der g /Int$(g)=n$。

证明 由定理 2.1 即可知 dim Der $g=2n-1$。设 $C(g)$ 为 g 的中心，那么 Int$(g) \cong g/C(g)$，而易知 $C(g)=Fe_2$。所以，dim Int$(g)=n-1$，dim Der g /Int$(g)=n$. □

2.3 推论 Der g 是一个可解李代数。

证明 考虑由公式(2.1)所定义的导子 D 在 g 的基 e_2，e_3，…，e_n，e_1 下的矩阵 $A(D)$。容易看出

万方数据

$$A(D)=\begin{pmatrix}(n-2)a_1+b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_2 & a_2\\ 0 & (n-3)a_1+b_n & b_{n-1} & \cdots & b_3 & a_3\\ 0 & 0 & (n-4)a_1+b_n & \cdots & b_4 & a_4\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n & a_n\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_1\end{pmatrix}.$$

即所有的 $A(D)$ 都是上三角矩阵。因此,Der g 是可解李代数。□

设 $D\in \mathrm{Der}\ g$,则由定理 2.1 知 D 被 $D(e_1)$, $D(e_n)$ 完全确定。记 $D_i\in \mathrm{Der}\ g$,使得 $D_i(e_1)=e_i$, $D_i(e_n)=0$, $i=1,\cdots,n$;$E_j\in \mathrm{Der}\ g$,使得 $E_j(e_1)=0$, $E_j(e_n)=e_j$, $j=2,\cdots,n$。那么 $\{D_i, E_j \mid 1\leqslant i\leqslant n,\ 2\leqslant j\leqslant n\}$ 构成 Der g 的基。经过计算可知:

$$\begin{aligned}&[D_1, D_i]=(n-i-1)D_i,\ i>1,\\&[D_i, D_j]=0,\ i,j>1,\\&[E_i, E_j]=0,\\&[D_1, E_j]=(n-i)E_i,\\&[D_i, E_j]=\begin{cases}-D_{i+j-n}, & \text{如果 } i+j-n\geqslant 2,\ i>1,\\ 0, & \text{如果 } i+j-n<2,\ i>1.\end{cases}\end{aligned}\tag{$*$}$$

下面,我们来考虑 Der g 的中心 $C(\mathrm{Der}\ g)$。我们先要对基域 F 的特征作一个假设。设 Char $F=0$ 或 Char $F=p>\dim g-2=n-2$。设 $D=\sum a_iD_i+\sum b_jE_j\in C(\mathrm{Der}\ g)$,则

$$0=[D_1,D]=\sum_{i=2}^{n}a_i(n-i-1)D_i+\sum_{j=2}^{n}b_j(n-j)E_j.$$

所以,$a_j(n-j-1)=b_j(n-j)=0$, $j=2,\cdots,n$。注意到对 F 的特征的假设,因此得

$$a_2=\cdots=a_{n-2}=a_n=b_2=\cdots=b_{n-1}=0。$$

所以,$D=a_1D_1+a_{n-1}D_{n-1}+b_nE_n$。从 $[D_n,D]=0$ 又可得 $a_1=b_n$。再由 $[D_2,D]=0$ 得 $a_1=b_n=0$。所以,$D=a_{n-1}D_{n-1}$。最后,由 $[E_n,D]=0$ 得 $D=0$。从而我们证明了

2.4 命题　设 Char $F=0$ 或 Char $F=p>n-2$, $n\geqslant 4$。g 是 F 上的 n 维最简线状李代数,则 $C(\mathrm{Der}\ g)=\{0\}$。

接下来我们考虑 $\mathscr{L}:=\mathrm{Der}\ g$ 的导子代数。对于 $\mathscr{D}\in \mathrm{Der}(\mathscr{L})$,设

$$\begin{cases}\mathscr{D}(D_i)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}D_j+\sum_{j=2}^{n}b_{ij}E_j,\ 1\leqslant i\leqslant n,\\ \mathscr{D}(E_i)=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}D_j+\sum_{j=2}^{n}d_{ij}E_j,\ 2\leqslant i\leqslant n.\end{cases}\tag{2.3}$$

首先,我们有如下的结果:

2.5 引理　设 L 是个李代数,$D\in \mathrm{Der}\ L$,那么 $D(L^{(1)})\subset L^{(1)}$。

对于上述 $\mathscr{L}$,由($*$)我们容易看出

$$\mathscr{L}^{(1)}=\langle D_2,\cdots,D_n,E_2,\cdots,E_{n-1}\rangle.\tag{2.4}$$

由此,在(2.3)式中我们有

$$\begin{cases}a_{i1}=b_{in}=0,\ i>1,\\ c_{j1}=d_{jn}=0,\ j<n.\end{cases}\tag{2.5}$$

由($*$)式,以适当的 $\mathscr{D}+\mathrm{ad}\ D$ 代替 $\mathscr{D}$(其中 $D\in\mathscr{L}$),可设

$$\mathscr{D}(D_1)=a_{11}D_1+a_{1,n-1}D_{n-1}+b_{1n}E_n.\tag{2.6}$$

由 $[D_1, E_n]=0$ 得

$$0=[\mathscr{D}(D_1), E_n]+[D_1, \mathscr{D}(E_n)]=-a_{1,n-1}D_{n-1}+\sum_{i>1}c_{ni}(n-i-1)D_i+\sum d_{ni}(n-i)E_i.$$

万方数据

所以，

$$a_{1,n-1}=0,\ c_{n2}=\cdots=c_{n,n-2}=c_{nn}=d_{n2}=\cdots=d_{n,n-1}=0. \tag{2.7}$$

由$[D_1,E_i]=(n-i)E_i$，对 $i<n$，有

$$\begin{aligned}(n-i)\mathscr{D}(E_i)&=\mathscr{D}[D_1,E_i]=[\mathscr{D}(D_1),E_i]+[D_1,\mathscr{D}(E_i)]\\&=[a_{11}D_1+b_{1n}E_n,E_i]+[D_1,\sum c_{ij}D_j+\sum d_{ij}E_j]\\&=a_{11}(n-i)E_i+\sum_{j>1}c_{ij}(n-j-1)D_j+\sum_{j<n}d_{ij}(n-j)E_j.\end{aligned}$$

从而，$(n-i)d_{ij}=d_{ij}(n-j)$，$j\neq i$；$(n-i)d_{ii}=a_{11}(n-i)+d_{ii}(n-i)$；$(n-i)c_{ij}=c_{ij}\times(n-j-1)$，$j>1$。所以，

$$d_{ij}=0,\ j\neq i,\ i<n;\ a_{11}=0,\ c_{ij}=0,\ i\neq j+1,\ i<n.$$

因此，

$$\begin{cases}\mathscr{D}(D_1)=b_{1n}E_n,\\ \mathscr{D}(E_2)=d_{22}E_2,\\ \mathscr{D}(E_i)=c_{i,i-1}D_{i-1}+d_{ii}E_i,\ 2<i<n,\\ \mathscr{D}(E_n)=c_{n1}D_1+c_{n,n-1}D_{n-1}+d_{nn}E_n.\end{cases}$$

(当 $p=n-1$ 时，$\mathscr{D}(E_2)=d_{22}E_2+c_{2n}D_n$。再由$[E_n,E_2]=0$ 可得 $c_{2n}=0$)。当 $2<i<n$ 时，由$[E_n,E_i]=0$ 得

$$\begin{aligned}\mathscr{D}[E_n,E_i]&=[\mathscr{D}(E_n),E_i]+[E_n,\mathscr{D}(E_i)]\\&=[c_{n1}D_1+c_{n,n-1}D_{n-1}+d_{nn}E_n,E_i]+[E_n,c_{i,i-1}D_{i-1}+d_{ii}E_i]\\&=c_{n1}(n-i)E_i+(c_{i,i-1}-c_{n,n-1})D_{i-1}\\&=0.\end{aligned}$$

所以，$c_{n1}=0$，$c_{n,n-1}=c_{i,i-1}$，$2<i<n$. 于是

$$\begin{cases}\mathscr{D}(E_2)=d_{22}E_2,\\ \mathscr{D}(E_i)=c_{n,n-1}D_{i-1}+d_{ii}E_i,\ 2<i\leqslant n.\end{cases}$$

由$[D_1,D_{n-1}]=0$ 得 $0=[\mathscr{D}(D_1),D_{n-1}]+[D_1,\mathscr{D}(D_{n-1})]$，即

$$b_{1n}D_{n-1}+\sum_{i>1}a_{n-1,i}(n-i-1)D_i+\sum b_{n-1,i}(n-i)E_i=0.$$

所以，$a_{n-1,i}=0$，$i\neq n-1$；$b_{1n}=0$；$b_{n-1,i}=0$，$i\neq n$. 因此(注意到(2.5)式)，

$$\mathscr{D}(D_1)=0,\ \mathscr{D}(D_{n-1})=a_{n-1,n-1}D_{n-1}.$$

因为$[D_1,D_n]=-D_n$，所以

$$-\mathscr{D}(D_n)=\sum_{i>1}a_{ni}(n-i-1)D_i+\sum b_{ni}(n-i)E_i.$$

于是，$\mathscr{D}(D_n)=a_{nn}D_n$.(当 $p=n-1$ 时，$\mathscr{D}(D_n)=a_{nn}D_n+b_{n2}E_2$，利用 $D_n=[E_n,D_n]$，可得 $b_{n2}=0$. 所以，仍有 $\mathscr{D}(D_n)=a_{nn}D_n$.)

对任意的 $1<i<n-1$，从$[D_1,D_i]=(n-i-1)D_i$，得

$$(n-i-1)\mathscr{D}(D_i)=\sum_{j>1}a_{ij}(n-j-1)D_j+\sum b_{ij}(n-j)E_j.$$

于是，$\mathscr{D}(D_i)=a_{ii}D_i+b_{i,i+1}E_{i+1}$，$1<i<n-1$. 由 $D_n=[E_n,D_n]$得 $a_{nn}D_n=d_{nn}D_n+a_{nn}D_n$。所以 $d_{nn}=0$。对 $1<i\leqslant n$，由 $D_i=[E_n,D_i]$得 $\mathscr{D}(D_i)=a_{ii}D_i$。所以

万方数据

$$\begin{cases}\mathscr{D}(D_1)=0,\\ \mathscr{D}(D_i)=a_{ii}D_i, & 1<i\leqslant n\\ \mathscr{D}(E_2)=d_{22}E_2\\ \mathscr{D}(E_i)=c_{n,n-1}D_{i-1}+d_{ii}E_i, & 2<i\leqslant n-1,\\ \mathscr{D}(E_n)=c_{n,n-1}D_{n-1}.\end{cases}\tag{2.8}$$

现令 $\mathscr{D}_1=\mathscr{D}-(n-2)^{-1}d_{22}\ \mathrm{ad}\ D_1$，则 $\mathscr{D}_1(E_2)=0$。此时仍设 $\mathscr{D}_1$ 满足(2.3)式。由于 $\mathrm{ad}\ D_1(D_1)=0$，故对 $\mathscr{D}_1$，(2.6)式仍成立，于是(2.8)也成立，但 $d_{22}=0$。

又设 $\mathscr{D}_2=\mathscr{D}_1-a_m\ \mathrm{ad}\ E_n+c_{n,n-1}\ \mathrm{ad}\ D_{n-1}$，则

$$\mathscr{D}_2(D_1)=\mathscr{D}_1(D_1)=\mathscr{D}(D_1)=0,$$
$$\mathscr{D}_2(E_2)=\mathscr{D}_1(E_2)=0,$$
$$\mathscr{D}_2(D_n)=\mathscr{D}_1(D_n)-a_m[E_n,D_n]=0,$$
$$\mathscr{D}_2(E_n)=\mathscr{D}_1(E_n)+c_{n,n-1}[D_{n-1},E_n]=0.$$

所以，$\mathscr{D}_2(E_i)=d_{ii}E_i$，$2<i\leqslant n-1$。由 $D_i=[E_i,D_n]$ 得 $\mathscr{D}_2(D_i)=[\mathscr{D}_2(E_i),D_n]=[d_{ii}E_i,D_n]=d_{ii}D_i$。所以 $a_{ii}=d_{ii}$。从而

$$\begin{cases}\mathscr{D}_2(D_1)=0,\\ \mathscr{D}_2(D_i)=a_{ii}D_i, & 2\leqslant i\leqslant n-1\\ \mathscr{D}_2(D_n)=0,\\ \mathscr{D}_2(E_i)=a_{ii}E_i, & 2\leqslant i\leqslant n-1\\ \mathscr{D}_2(E_n)=0.\end{cases}$$

设 $a_i=a_{ii}$，$2\leqslant i\leqslant n$，则 $a_2=a_n=0$。又由于当 $i+j-n\geqslant 2$ 时，$D_{i+j-n}=[E_i,D_j]$，所以 $\mathscr{D}_2(D_{i+j-n})=[\mathscr{D}_2(E_i),D_j]+[E_i,\mathscr{D}_2(D_j)]$，从而 $a_i+a_j=a_{i+j-n}$。于是我们有

$$a_2=0,\ -a_{i-1}+a_i+a_{n-1}=0,\ i=3,\cdots,n-1.$$

这是一个含 $n-2$ 个未知量，$n-2$ 个方程的齐次线性方程组。由于该方程组的系数行列式 $\det(A)=n-2\neq 0$，所以上述方程组只有零解。即，$a_2=\cdots=a_n=0$，故 $\mathscr{D}_2=0$。

所以，由上述计算可得 $\mathrm{Der}(\mathscr{L})=\mathrm{ad}(\mathscr{L})$。再结合推论 2.3 和命题 2.4，我们就证明了

2.6 定理　设 g 是域 F 上的 n 维最简线状李代数。如果 $\mathrm{Char}\ F=0$ 或 $\mathrm{Char}\ F=p>n-2$，且 $n\geqslant 4$，那么 $\mathrm{Der}\ g$ 是一个可解完备李代数。

对于特征零的域(特别是代数闭域)上的有限维完备李代数近十多年来已经建立起了比较完整的理论(见[3])，对于低维的以及可解的完备李代数甚至已经有了一些分类定理(见[4]，[5]，[6])。但是，对于模李代数的情形，特别是可解的情形，以前基本上没有涉及到。因此，定理 2.6 第一次提供了一类可解完备模李代数的例子。下面我们再来给出一类可解完备李代数的例子。

令 $D=D_1$，$E=E_n\in\mathrm{Der}\ g$，则 $T:=\langle D,E\rangle$ 是 $\mathrm{Der}\ g$ 的交换子代数。因此，$T+g\subset h(g)$ $(=\mathrm{Der}\ g+g)$，称为 g 的全形，参见[3])是李代数 $h(g)$ 的子代数。

定理　设 g 是域 F 上的 n 维最简线状李代数，$\mathrm{Char}\ F=0$ 或 $\mathrm{Char}\ F=p>n-2$。则作为李代数 g 的全形的子代数，$L:=T+g$ 是一个可解完备李代数。

证明　直接计算可知道 $C(L)=\{0\}$，并且 $\mathrm{Der}(L)=\mathrm{ad}(L)$。所以 L 是完备的。由于 $L^{(1)}=\langle e_1,e_2,\cdots,e_n\rangle$，$L$ 的可解性是显然的。因此，结论得证。

如果 F 是特征为零的代数闭域，则我们有一更简单的证明：首先，D,E 都是 g 上的半单线性变换，且容易算出 $C_{\mathrm{Der}\ g}(T)=T$，从而 T 是极大环面，用[5]的语言，T 是 g 的极大环面。

万方数据

由于 e_1, e_n 是 $T-$msg,因此,g 是极大秩的幂零李代数(参见[5])。于是,根据[5,定理 3],L 是一个可解完备李代数,具有极大秩 rank $L=2$. □

3 最简线状李代数的自同构群

在本节中我们要来讨论最简线状李代数 g 的自同构群 Aut g.

3.1 定理 设 g 是域 F 上的 $n(\geqslant 4)$ 维最简线状李代数。设 $\sigma\in$ Aut g,则存在 $a_1,\cdots,a_n$, $b_2,\cdots,b_n\in F$,并且 $a_1b_n\neq 0$,使得

$$\sigma(e_1)=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i,\ \sigma(e_j)=a_1^{n-j}\sum_{i=2}^{j}b_{n+i-j}e_i,\ j\geqslant 2. \qquad (**)$$

反之,若给定 $a_1,\cdots,a_n$, $b_2,\cdots,b_n\in F$,且 $a_1b_n\neq 0$,则由(* *)所确定的 g 上的线性变换 $\sigma\in$ Aut g。

证明 任取 $\sigma\in$ Aut g。首先设 $\sigma(e_1)=\sum a_ie_i$, $\sigma(e_n)=\sum b_ie_i$,则

$$\begin{aligned}\sigma(e_{n-1})&=\sigma[e_1,e_n]=[\sigma(e_1),\sigma(e_n)]\\&=a_1(b_3e_2+b_4e_3+\cdots+b_ne_{n-1})-b_1(a_3e_2+a_4e_3+\cdots+a_ne_{n-1})\\&=(a_1b_3-a_3b_1)e_2+(a_1b_4-a_4b_1)e_3+\cdots+(a_1b_n-a_nb_1)e_{n-1}.\end{aligned}$$

用归纳法可以证明

$$\sigma(e_j)=a_1^{n-j-1}(a_1b_{n+2-j}-a_{n+2-j}b_1)e_2+\cdots+a_1^{n-j-1}(a_1b_n-a_nb_1)e_j,\ 2\leqslant j\leqslant n-1.$$

从而

$$\sigma(e_2)=a_1^{n-3}(a_1b_n-a_nb_1)e_2, \qquad (3.1)$$

$$\sigma(e_3)=a_1^{n-4}((a_1b_{n-1}-a_{n-1}b_1)e_2+(a_1b_n-a_nb_1)e_3). \qquad (3.2)$$

由于$[e_n,e_3]=0$,所以 $0=[\sigma(e_n),\sigma(e_3)]=b_1a_1^{n-4}(a_1b_n-a_nb_1)e_2$,即 $b_1a_1^{n-4}(a_1b_n-a_nb_1)=0$。由(3.1)式知 $a_1\neq 0$, $a_1b_n-a_nb_1\neq 0$。从而 $b_1=0$, $a_1b_n\neq 0$。所以,

$$\sigma(e_j)=a_1^{n-j}\sum_{i=2}^{j}b_{n+i-j}e_i,\ 2\leqslant j\leqslant n-1.$$

显然,上式对 $j=n$ 也成立。因此,必要性得证。

充分性。容易验证由(* *)式定义的 g 上的线性变换 σ 是 g 的自同态,并且,σ 在基 $e_2,\cdots,e_n,e_1$ 下的矩阵是上三角矩阵,其行列式的值等于 $a_1^{1+(n-2)(n-1)/2}b_n^{n-1}\neq 0$。因此 σ 是自同构。□

3.2 推论 Aut g 是一个可解群。

3.3 定理 设 $n(\geqslant 4)$ 维最简线状李代数 g 的基域为 F。如果 $|F|\geqslant n$,那么 Aut g 是无中心的。

证明 设 Aut g 的中心为 C(Aut g)。在(* *)式中取 $a_1=1$, $b_n=b\neq 0$,其余 $a_i=b_j=0$,得一自同构,记为 η_b。那么 $\eta_b^{-1}=\eta_{b^{-1}}$。

对任意的 $\sigma\in C$(Aut g),仍设 $\sigma(e_1)=\sum a_ie_i$,$\sigma(e_n)=\sum_{i>1}b_ie_i$。则由于 $\eta_b\sigma\eta_b^{-1}=\sigma$,所以

$$\begin{aligned}\eta_b\sigma\eta_b^{-1}(e_1)&=\eta_b\sigma\eta_{b^{-1}}(e_1)=\eta_b\sigma(e_1)\\&=\eta_b\sum a_ie_i=a_1e_1+\sum_{i>1}ba_ie_i=\sigma(e_1).\end{aligned}$$

所以,$ba_i=a_i$, $\forall i>1$。由于 $|F|\geqslant n$,可取 $b\in F^*$, $b\neq 1$。从而 $a_i=0$, $\forall i>1$。

在(* *)式中取 $a_1=a\neq 0$, $b_n=1$,其余 a_i, $b_i=0$。所得自同构记为 φ_a。于是,由

万方数据

$\varphi_a\sigma\varphi_a^{-1}(e_n)=\sigma(e_n)$可得 $b_ia^{n-i}=b_i$，即$(a^{n-i}-1)b_i=0$。所以，$b_2=\cdots=b_{n-1}=0$(对每个 $i<n$，至少有一个 $a\in F^*$，使 $a^{n-i}-1\neq 0$)。

对每个 $i>1$，令 $\sigma_i\in \mathrm{Aut}\ g$，使 $\sigma_i(e_1)=e_1+e_i$，$\sigma_i(e_n)=e_n$。则由 $\sigma_i\sigma\sigma_i^{-1}(e_i)=\sigma(e_1)$得 $a_1(1-a_1^{n-i-1}b_n)=0$，$i=2,\cdots,n$。于是，$a_1=b_n=1$。从而 $\sigma=\mathrm{id}_g$。所以，$C(\mathrm{Aut}\ g)=\{\mathrm{id}_g\}$. □

4　素特征最简线状李代数

在这一节中我们要对素特征最简线状李代数的性质作进一步的讨论。本节中考虑的最简线状李代数 g 的维数 n 可以是任意大于 2 的整数。

4.1　定理　设 $\mathrm{Char}\ F=p>0$，g 是 F 上的 n 维最简线状李代数。那么 g 是可限制的充分必要条件是 $n<p+2$。

证明　设 g 是 F 上的 n 维最简线状李代数，则 g 是幂零李代数。由[7，§ 2.2]中的讨论知，当 $n=\dim g<p+2$ 时，g 是可限制的。

如果 $n\geqslant p+2$，则 $n-p\geqslant 2$，所以$(\mathrm{ad}\ e_1)^p(e_n)=e_{n-p}$。所以，$(\mathrm{ad}\ e_1)^p\neq 0$。而由 g 的定义知，$(\mathrm{ad}\ e_1)^p\notin \mathrm{ad}\ g$，因此 g 不是可限制的。□

以下我们假设 $p\leqslant n-2$。令 $\bar{g}:=\varphi(g)$，$A_i:=\varphi(e_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，这里 φ 是定理1.3中定义的 g 到 $gl(n,F)$的单一同态。

我们知道 $gl(n,F)$按矩阵的 p 次幂运算构成限制李代数。由于 $\bar{g}$ 是 $gl(n,F)$的李子代数，所以我们可以讨论 $\bar{g}$ 在 $gl(n,F)$中生成的 p—子代数 $\bar{g}_p$。直接计算知道

$$\begin{aligned}
&A_2^p=A_3^p=\cdots=A_n^p=0,\\
&A_1^p=E_{1,p+1}+E_{2,p+2}+\cdots+E_{n-1-p,n-1},\\
&A_1^{p^2}=E_{1,p^2+1}+E_{2,p^2+2}+\cdots+E_{n-1-p^2,n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_1^{p^s}=E_{1,p^s+1}+E_{2,p^s+2}+\cdots+E_{n-1-p^s,n-1},\\
&A_1^{p^{s+1}}=0.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

这里 s 为满足 $p^s\leqslant n-2$ 的最大正整数。

4.2　定理　设 $\hat{g}$ 是 $gl(n,F)$中由 $\bar{g}$ 和 A_1^p，$A_1^{p^2}$，$\cdots$，$A_1^{p^s}$ 所生成的子空间，则 $\hat{g}=\bar{g}_p$。

证明　只要证明 $\hat{g}$ 是 $gl(n,F)$的 p—子代数即可。因为此时 $\hat{g}$ 自然是包含 $\bar{g}$ 的最小 p—子代数。

(1)由于 $\hat{g}\supset\bar{g}$，并且$[\hat{g},\hat{g}]\subset\bar{g}$，故 $\hat{g}$ 是子代数。

(2)令 $G=\{x\in\hat{g}\mid x^p\in\hat{g}\}$。下证 G 是 $\hat{g}$ 的子空间。

任给 $k\in F$，$x,y\in G$，则$(kx)^p=k^px^p\in\hat{g}$，所以 $kx\in G$。又因为

$$(x+y)^p=x^p+y^p+\sum_{i=1}^{p-1}s_i(x,y).$$

由[7，§ 2.1]，$s_i(x,y)\in\hat{g}^p\subset\bar{g}\subset\hat{g}$。所以$(x+y)^p\in\hat{g}$，即 $x+y\in G$。于是 G 是一个子空间。

由(4.1)式知，$A_i\in G$，$i=1,\cdots,n$，$A_1^{p^j}\in G$，$j=1,\cdots,s$。所以 $G=\hat{g}$。从而 $\hat{g}$ 是 p—子代数。于是，$\hat{g}=\bar{g}_p$。□

4.3　定理　$(\hat{g},p,\varphi)$是 g 的极小 p—包络。

证明　首先，由于 g 是一个限制李代数，φ 是 g 到 $\hat{g}$ 的单一同态，且 $\varphi(g)_p=\bar{g}_p=\hat{g}$。所

万方数据

以,由 p—包络的定义(参见[7,§ 2.5])知$(\hat{g},p,\varphi)$是 g 的 p—包络。

显然 $\dim\hat{g}<\infty$。若能证明 $C(\hat{g})\subset\bar{g}=\varphi(g)$,则由[7,§ 2.5]即可得$(\hat{g},p,\varphi)$是极小的。

任取 $x\in C(\hat{g})$。设

$$x=\sum_{i=0}^{s}l_iA_1^{p^i}+\sum_{j=2}^{n}b_jA_j.$$

则 $0=[x,A_1]=b_3A_2+b_4A_3+\cdots+b_nA_{n-1}$。所以,$b_3=b_4=\cdots=b_n=0$。又 $0=[x,A_n]=l_0A_{n-1}+l_1A_{n-p}+l_2A_{n-p^2}+\cdots+l_sA_{n-p^s}$,所以,$l_0=l_1=l_2=\cdots=l_s=0$。因此,$x=b_2A_2\in\bar{g}$,即 $C(\hat{g})\subset\bar{g}$。定理得证。□

[参 考 文 献]

[1] L Boza, F J Echarte, J Nunez. Classification of complex filiform Lie algebras of dimension 10[J]. Algebras, Groups and Geometries, 1994, 11(3): 253~276.

[2] J M Ancochea, M Goze. Classification des algebres de Lie filiformes de dimension 8[J]. Arch Math, 1988, 50: 511~525.

[3] 孟道骥,朱林生,姜翠波. 完备李代数[M]. 北京:科学出版社,2001.

[4] L S Zhu, D J Meng. The classification of complete Lie algebras with low dimensions[J]. Alg Colloquium, 1997, 4: 95~109.

[5] D J Meng, L S Zhu. Solvable complete Lie algebras I[J]. Comm in Algebra, 1996, 24(13): 4181~4197.

[6] L S Zhu, D J Meng. Solvable complete Lie algebras II[J]. Alg Colloquium, 1998, 5: 289~296.

[7] F Strade, R Farnsteiner. Modular Lie Algebras and Their Representations[M]. New York and Basel: Marcel Dekker, Inc. 1988.

On the Simplest Filiform Lie Algebras

LIN Lei

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: In this paper, the concept of simplest filiform Lie algebra is introduced and properties of n—dimensional simplest filiform Lie algebras g are discussed. A filiform Lie algebra g over any field F is referred to as simplest if its Lie multiplication between elements of an adapted basis is trivial except for ones defining the basis. Almost all discussions in the article are under the assumption of dim $g\geqslant 4$. A realization of such a Lie algebra g is given and derivation algebra Der g is determined. It is proved that if for the base field F, its characteristic is zero or $p>n-2$ the derivation algebra Der g is a solvable complete Lie algebra. Automorphism groups of simplest filiform Lie algebras are determined and it is proved that they are centerless and solvable if $|F|\geqslant n$. At the end of the paper, it is shown that the simplest filiform moludar Lie algebra g is restrictable if and only if $n<p+2$. And for the nonrestricable case a minimal p—envelope of g is given.

Key words: filiform Lie algebra; complete Lie algebra; modular Lie algebra

万方数据