文章编号:1000-5641(2003)02-0006-05

特征 2 李代数 G_2 变形的中心扩张

李可峰[1], 林 磊[2]
(1. 济南大学 数学系,济南 250002; 2. 华东师范大学 数学系,上海 200062)

摘要: 该文决定了特征 2 代数闭域 F 上 G_2 的变形的一维中心扩张。
关键词:一维中心扩张; 2-上循环; 特征 2 李代数
中图分类号: O153 文献标识码:A

0 引 言

众所周知,利用李代数的一维中心扩张可以构造一些新的李代数。这些新李代数的分类是一个有意义的课题。本文的目的就是决定沈光宇先生给出的 Char $F=2$ 代数闭域 F 上 G_2 变形这一族新单李代数的一维中心扩张。

典型李代数 G_2 为 14 维的单李代数。沈光宇先生在文[1]中给出了普遍阶化 $U(\Gamma^-)$ 的构造(其中 Γ^- 为负的深度为 2 的 5 维李代数)。尤其是在 Char $F=2$ 的代数闭域 F 上给出典型李代数 G_2 的模单变形 $V_iG(i=3,\cdots,7)$。V_iG 和 G_2 一样也具有深度为 2 的阶化。[2]给出 G_2 的一维中心扩张。下面,我们将通过 $V_iG(i=3,\cdots,7)$ 上 2-上循环在其基上的作用,决定它们的一维中心扩张。

在以下的讨论中,总是假定 Char $F=2$,并且所采用符号与[1]相同。设 V 为 $V_iG(i=3,\cdots,7)$ 中任一个。V 总可以嵌入到 Heisenberg 型普遍阶化李代数 $K(5)$ 中,有深度为 2 的阶化,故 $V=\oplus_{i=-2}^{2}V_i$。其中 $V_{-2}=\langle 1\rangle$, $V_{-1}=\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$, $V_0=\langle h_1, h_2, e_1,\cdots, e_m\rangle$ ($m=2$, $V=V_3G$, V_4G, V_6G; $m=3$, $V=V_5G$; $m=4$, $V=V_7G$), $V_1=\langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$, $V_2=\langle f_5\rangle$。对 V 中基的元素的具体表达式,我们罗列下:

(1) $V_3G=V_3G(a)$, 其中 $a\neq 0$,

$$h_1=x_1x_3+x_2x_4,\ h_2=x_1x_3+x_5,$$
$$e_1=x_1x_4+ax_2^{(2)},\ e_2=x_2x_3;$$
$$f_1=ax_2^{(3)}+x_1x_2x_4+x_1x_5,$$
$$f_2=x_1x_2x_3+x_2x_5,\ f_3=x_3x_5,$$
$$f_4=ax_2^{(2)}x_3+x_4x_5;$$
$$f_5=ax_2^{(3)}x_3+x_1x_3x_5+x_2x_4x_5.$$

(2) $V_4G=V_4G(a)$, 其中 a_2, $a_3\neq 0$

收稿日期:2001-04
基金项目:国家自然科学基金(10271047) 教育部博士点基金(20020269017)和上海市重点学科建设项目
作者简介:李可峰(1972-),男,硕士,讲师.

$h_1 = x_1x_3 + x_2x_4$, $h_2 = x_1x_3 + x_5$,

$e_1 = x_1x_4 + a_2x_2^{(2)} + a_3x_3^{(2)}$, $e_2 = x_2x_3$;

$f_1 = a_2x_2^{(3)} + a_3x_2x_3^{(2)} + x_1x_2x_4 + x_1x_5$,

$f_2 = x_1x_2x_3 + x_2x_5$, $f_3 = x_3x_5$,

$f_4 = a_2x_2^{(2)}x_3 + a_3x_3^{(3)} + x_4x_5$;

$f_5 = a_2x_2^{(3)}x_3 + a_3x_2x_3^{(3)} + x_1x_3x_5 + x_2x_4x_5$.

(3) $V_5G = V_5G(a, a_1, b_1)$，其中 $d = a + a_1b_1$, $d, a, a_1, b_1 \neq 0$,

$h_1 = x_1x_2 + ax_3x_4$, $h_2 = x_2x_4 + x_5$,

$e_1 = a_1x_1x_4 + x_2^{(2)} + ax_3^{(2)}$, $e_2 = b_1x_2x_3 + a_1x_4^{(2)} + x_1^{(2)}$, $e_3 = x_1x_2 + ax_3x_4$;

$f_1 = b_1x_2^{(3)} + ax_1^{(2)}x_3 + ab_1x_2x_3^{(3)} + a^2x_3x_4^{(2)} + a_1b_1x_1x_2x_4 + dx_1x_5$,

$f_2 = a_1x_1^{(3)} + ax_2^{(2)}x_4 + a^2x_3^{(2)}x_4 + aa_1x_1x_4^{(2)} + a_1b_1x_1x_2x_3 + dx_2x_5$,

$f_3 = aa_1x_4^{(3)} + a_1x_1^{(2)}x_4 + x_1x_2^{(2)} + ax_1x_3^{(2)} + ax_2x_3x_4 + dx_3x_5$,

$f_4 = ab_1x_3^{(3)} + x_1^{(2)}x_2 + b_1x_2^{(2)}x_3 + ax_2x_4^{(2)} + ax_1x_3x_4 + dx_4x_5$;

$f_5 = a_1x_1^{(3)}x_4 + x_1^{(2)}x_2^{(2)} + ax_1^{(2)}x_3^{(2)} + aa_1x_1x_4^{(3)} + dx_1x_3x_5 + b_1x_2^{(3)}x_3$
$+ ab_1x_2x_3^{(3)} + ax_2^{(2)}x_4^{(2)} + a^2x_3^{(2)}x_4^{(2)} + dx_2x_4x_5 + ax_1x_2x_3x_4$.

(4) $V_6G = V_6G(a, s)$，其中 $a \neq 0$, $s \neq 0$

$h_1 = x_1x_2 + ax_3x_4$, $h_2 = x_2x_4 + x_5$,

$e_1 = x_2^{(2)} + ax_3^{(2)}$, $e_2 = sx_1x_4 + x_2x_3$;

$f_1 = ax_3^{(3)} + x_2^{(2)}x_3 + sx_1x_2x_4 + sx_1x_5$;

$f_2 = x_1x_2^{(2)} + ax_1x_3^{(2)} + ax_2x_3x_4 + ax_3x_5$,

$f_3 = x_2^{(2)}x_4 + ax_3^{(2)}x_4 + x_2x_5$,

$f_4 = a^{-1}x_2^{(3)} + x_2x_3^{(2)} + sx_4x_5$;

$f_5 = sx_1x_2^{(2)}x_4 + asx_1x_3^{(2)}x_4 + x_2^{(3)}x_3 + ax_2x_3^{(3)} + sx_1x_2x_5 + asx_3x_4x_5$.

(5) $V_7G = V_7G(c)$，其中 $c \neq 0, 1$

$h_1 = x_1x_3 + x_2x_4$, $h_2 = cx_1x_3 + x_5$,

$e_1 = x_1x_2$, $e_2 = x_3x_4$, $e_3 = x_2x_3$, $e_4 = x_1x_4$;

$f_1 = cx_1x_2x_4 + x_1x_5$, $f_2 = cx_1x_2x_4 + x_2x_5$,

$f_3 = (c+1)x_2x_3x_4 + x_3x_5$, $f_4 = (c+1)x_1x_3x_4 + x_4x_5$;

$f_5 = (c+1)x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_2x_4x_5$.

并且 V 中李运算由下式给出

$$[f,g] = (D_5f)\Big(g - \sum_{i=1}^{2}(D_{2+i}g)x_{2+i}\Big) - (D_5g)\Big(f - \sum_{i=1}^{2}(D_{2+i}f)x_{2+i}\Big) + \sum_{i=1}^{2}\big((D_if)(D_{2+i}g) - (D_ig)(D_{2+i}f)\big), \ \forall f, g \in V.$$

其中 D_i 是关于 x_i 求一次导。

单李代数的一维中心扩张必决定它的一个 2－上循环,而一个李代数的 2－上循环必诱导这个李代数的一个一维中心扩张作成李代数[3,4]。李代数 L 与它的一维中心扩张 E 作用 F－模构成正合列：

$$0 \to F \to E \to L \to 0$$

其中域 F 作为平凡 L - 模同构于 Fc。则 2 - 上循环 $\psi \in Z^2(L, F)$。以 E_ψ 表示 2 - 上循环 ψ 所对应的 L 的一维中心扩张。以 $[\psi]$ 表示 $\psi + B^2(L, F)$ 的上同调类,则在 $H^2(L, F)$ 与 L 的一维中心扩张的等价类之间建立了一一对应关系([5])。而我们也可从划分李代数的一维中心扩张同构类得到它们等价类的含义,这两种含义是一致的。

设李代数有两个中心扩张 $E = L \oplus Fc$, $\tilde{E} = L \oplus Fd$, ψ, ϕ 是分别对应的 2 - 上循环。若 E 与 $\tilde{E}$ 同构,同构映射为 ρ。不妨设 $\rho(c) = d$。则 $\rho(x) = x + f(x)d (\forall x \in L)$,于是 $f \in F^*$。并且 f 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(kx) = kf(x)$ $(\forall x, y \in L, \forall k \in F)$。而李代数 L 的两个一维中心扩张 E, $\tilde{E}$ 同构当且仅当它们对应的 2 - 上循环 ψ, ϕ 满足。

$$\phi(x, y) - \psi(x, y) = f([x, y]), \quad (\forall x, y \in L, f \in F^*)$$

李代数 L 的两个一维中心扩张决定的 2 - 上循环 ϕ, ψ 等价,若这两个一维中心扩张同构。也就是若存在 L 上的一个线性函数 f 使得 $\psi(x, y) - \phi(x, y) = f([x, y])$ $(\forall x, y \in L)$。

Rolf Farnsteiner 在文[6]得到 特征 0 代数闭域 F 上,广义 Cartan 矩阵 $A_{n \times n}$(rank $A = l$)所伴随的 Kac - Moody 代数 $g(A)$ 的同调模 $\dim H^2(g(A), F) = \binom{2n-l}{2}$,并且证明了这就是决定 $g(A)$ 一维中心扩张等价类变量的维数。而 Char $F > 0$ 时尚不能给出明确的结论。另一方面,([7])具有一个非退化结合双线性型的有限维阶化单李代数 $L = \oplus_{i=-r}^{s} L_i$ 满足 $[L_{-1} L_i] = L_{i-1} (\forall -r \leqslant i \leqslant s)$,在加一些较强的条件之后有结论

$$\dim_F H^2(L, F) = \dim_F(\mathrm{Der}_F L / \mathrm{ad}_F L) - 1 + \delta_{(0, s-r)}$$

其中 $\delta_{(0, s-r)}$ 为 mod(p) 的 Kronecker 符号。我们要讨论的 V 并不能满足这些条件:V_0 不存在理想 J 使得 $J = [J, J]$,且它的所有导子都是内导子,V_2, V_{-1} 均为 J 不可约的([8, 9])。我们需对 V 进行讨论。由于 Char = 2, ψ 在 V 上的作用是对称作用。从而所有 ψ 都是定义在 $V \times V$ 上的对称双线性型。确定其 2 - 上循环就变成决定其满足 Jacobi 等式的对称双线性型。换句话说,决定 2 - 上循环在它们基上的作用,给出决定这些作用的独立变量的个数。为了计算方便,所指的基是前面列出的基。

1 一维中心扩张

设 V 的一维中心扩张为 $\tilde{V}$,则 $\tilde{V}$ 决定的 2 - 上循环 ψ 可以由 ψ 在 $V \times V$ 基上所决定。以 $y_i (i = 1, \cdots, n)$ 依次代替 1, x_1, x_2, x_3, x_4, h_1, h_2, e_1, e_2(或者有 e_3 或者有 e_3, e_4), f_1, f_2, f_3, f_4, f_5,其中 $n = \dim V$。记 $\psi_{i,j} = \psi(y_i, y_j) (i, j = 1, \cdots, n)$。

引理 设 $\tilde{V}$ 相对于 V 的 2 - 上循环在其基上的作用由 p 维变量决定,则:

(1) $p = 17$, $V = V_3G$, V_4G, V_6G, V_7G。

(2) $p = 15$, $V = V_5G$。

证明 我们对 $V_iG (i = 3, \cdots, 7)$ 分别考虑:

(1) V_3G 中心扩张中 $\psi_{i,j} (i, j = 1, \cdots, 14)$ 共有相互无关的独立变量 17 个:$\psi_{1,14}$, $\psi_{2,14}$, $\psi_{3,14}$, $\psi_{4,14}$, $\psi_{5,14}$, $\psi_{7,14}$, $\psi_{8,14}$, $\psi_{2,6}$, $\psi_{3,6}$, $\psi_{4,6}$, $\psi_{5,6}$, $\psi_{2,4}$, $\psi_{2,5}$, $\psi_{2,12}$, $\psi_{7,8}$, $\psi_{7,9}$, $\psi_{4,13}$。

(2) V_4G 中心扩张中 $\psi_{i,j} (i, j = 1, \cdots, 14)$ 共有相互无关的独立变量 17 个:$\psi_{1,14}$, $\psi_{2,14}$, $\psi_{3,14}$, $\psi_{4,14}$, $\psi_{5,14}$, $\psi_{7,14}$, $\psi_{8,14}$, $\psi_{2,4}$, $\psi_{3,6}$, $\psi_{4,6}$, $\psi_{5,6}$, $\psi_{2,5}$, $\psi_{2,6}$, $\psi_{2,13}$, $\psi_{3,13}$, $\psi_{4,13}$, $\psi_{5,13}$。

(3) V_5G 中心扩张中 $\psi_{i,j} (i, j = 1, \cdots, 15)$ 共有相互无关的独立变量 15 个:$\psi_{1,15}$, $\psi_{2,15}$,

$\psi_{3,15}, \psi_{4,15}, \psi_{5,15}, \psi_{7,15}, \psi_{3,14}, \psi_{3,6}, \psi_{4,6}, \psi_{5,6}, \psi_{2,6}, \psi_{2,4}, \psi_{4,14}, \psi_{7,8}, \psi_{7,9}$。

(4) V_6G 中心扩张中 $\psi_{i,j}(i,j=1,\cdots,14)$ 共有相互无关的独立变量17个:$\psi_{1,14}, \psi_{2,14}, \psi_{3,14}, \psi_{4,14}, \psi_{5,14}, \psi_{7,14}, \psi_{8,14}, \psi_{2,6}, \psi_{3,6}, \psi_{4,6}, \psi_{5,6}, \psi_{2,4}, \psi_{2,5}, \psi_{2,11}, \psi_{7,8}, \psi_{7,9}, \psi_{3,10}$。

(5) V_7G 中心扩张中 $\psi_{i,j}(i,j=1,\cdots,16)$ 共有相互无关的独立变量17个:$\psi_{1,16}, \psi_{2,16}, \psi_{3,16}, \psi_{4,16}, \psi_{5,16}, \psi_{7,16}, \psi_{2,4}, \psi_{2,6}, \psi_{3,6}, \psi_{4,6}, \psi_{5,6}, \psi_{2,13}, \psi_{2,14}, \psi_{2,15}, \psi_{3,15}, \psi_{4,15}, \psi_{3,14}$。

由于 V 的基的李运算中 $[y_i, y_j] = y_k(1 \leqslant i,j,k \leqslant n)(n=\dim V)$ 中 y_k 出现的次数有限,我们总可以验证这 p 个变量是相互独立的无关变量。我们也可以通过

$$\psi([y_i,y_j],y_k)+\psi([y_j,y_k],y_i)+\psi([y_k,y_i],y_j)=0,\ (1\leqslant i<j<k\leqslant n)$$

来验证这确是 p 个相互独立的无关变量(因为要验证的式子是有限个)。这样我们也就证明了它们是相互独立无关的。也就是说,给定一个一维中心扩张就决定这 p 个变量诱导的2-上循环;反之,通过给 $V \times V$ 上这 p 个变量线性赋值就决定了它上面的一个2-上循环,决定了一个一维中心扩张。

定理　决定 V 的一维中心扩张

$$\dim_F H^2(V,F)=\begin{cases}3 & V=V_3G, V_4G, V_6G;\\ 1 & V=V_7G;\\ 0 & V=V_5G.\end{cases}$$

证明　由于李代数 V 的一维中心扩张的等价类与模 $H^2(V,F)$ 之间存在一一对应关系,故需对一维中心扩张的等价进行讨论。

不妨设 ψ, ϕ 是两个同构的一维中心扩张所对应的等价2-上循环,只需讨论 $\psi(x,y)-\phi(x,y)=f([x,y])(\forall x,y\in V, f\in F^*)$,确定 f 在 V 的基上的作用。对前述 $V_iG(i=3,\cdots,7)$ 的 p 个变量分别讨论即可。记 $(\psi-\phi)_{i,j}=\psi_{i,j}-\phi_{i,j}(1\leqslant i,j\leqslant n)$, $n=\dim V$。

(1)在 V_3G 中有以下结果:$(\psi-\phi)_{2,4}=f(y_1)$, $(\psi-\phi)_{2,6}=f(y_2)$, $(\psi-\phi)_{3,6}=f(y_3)$, $(\psi-\phi)_{4,6}=f(y_4)$, $(\psi-\phi)_{5,6}=f(y_5)$, $(\psi-\phi)_{1,14}=f(y_6)$, $(\psi-\phi)_{2,12}=f(y_7)$, $(\psi-\phi)_{7,8}=f(y_8)$, $(\psi-\phi)_{7,9}=f(y_9)$, $(\psi-\phi)_{2,14}=f(y_{10})$, $(\psi-\phi)_{3,14}=f(y_{11})$, $(\psi-\phi)_{4,14}=f(y_{12})$, $(\psi-\phi)_{5,14}=f(y_{13})$, $(\psi-\phi)_{7,14}=f(y_{14})$, $(\psi-\phi)_{8,14}=0$, $(\psi-\phi)_{2,5}=0$, $(\psi-\phi)_{4,13}=0$。从而其等价类共有3维变量决定。这3维变量是 $g_1=\psi_{8,14}, g_2=\psi_{2,5}, g_3=\psi_{4,13}$。所以 $\dim H^2(V_3G,F)=3$。

(2) V_4G 等价类由3维变量决定,即 $g_1=\psi_{2,5}, g_2=\psi_{8,14}, g_3=\psi_{4,13}$。所以

$$\dim H^2(V_4G,F)=3。$$

(3) V_5G 等价类仅由一类,即 V_5G 的所有一维中心扩张等价为平凡的,所以

$$\dim H^2(V_5G,F)=0。$$

(4) V_6G 等价类由3维变量决定,即 $g_1=\psi_{8,14}, g_2=\psi_{2,5}, g_3=\psi_{3,10}$。所以

$$\dim H^2(V_6G,F)=3。$$

(5) V_7G 等价类由1维变量决定,即 $g_1=\psi_{3,15}+c\psi_{2,5}-\psi_{2,14}$。所以

$$\dim H^2(V_7G,F)=1。$$

这样,我们实际上已确定了 V 的一维中心扩张。

[参　考　文　献]

[1]　Shen Guangyu. Variations of the classical Lie algebra G_2 in low characteristics[J]. Nova J of Algebra and Geometry, 1993,

2(3):217~243.
[2] 李可峰.特征 2 李代数 G_2 的中心扩张[J].聊城师范学院学报,1999,2:15~18.
[3] Victor G Kac. Infinite dimensional Lie algebras[M]. Cambridge:Cambirde University Press, 1990.
[4] 万哲先. Kac-Moody 代数导引[M].北京 科学出版社,1993.
[5] Sen Chiu. Central extensions and $H^1(L, L^*)$ of the graded Lie algebra of Cartan Type[J]. J Algebra, 1992, 149(1):46~67.
[6] R Farnsteiner. Derivations and central extensions of finitely generated graded Lie algbras[J]. J Algbra, 1988, 118:33~45.
[7] R Farnsteiner. Central extensions and invariant forms of graded Lie algebra[J]. Algebras, Groups Geom, 1986, 3:431~455.
[8] 刘东. On the Variations of Simple Lie algebra G_2 of characteristic 2[D].华东师范大学硕士论文,1998.
[9] 李可峰,林 磊.特征 2 李代数 G_2 变形的导子代数[J].华东师范大学学报(自然科学版),2001,3:1~7.

One-dimensional Central Extensions for Variations of G_2 of Characteristic 2

LI Ke-feng[1], LIN Lei[2]
(1. *Department of Mathematics, Jinan University, Jinan* 250002, *China*;
2. *Department of Mathematics, East China Nomal University, Shanghai* 200062, *China*)

Abstract: In this paper, we determine all these 1-dimensional central extensions for some variations of the classical Lie algebra G_2 over a field F of characteristic 2, which were introduced by Prof. Guangyu Shen in [1].
Key words: 2-cocycles; central extensions; Lie algebras of char 2