文章编号:1000 - 5641(2001)03 - 0001 - 07

特征 2 李代数 G_2 变形的导子代数

李可峰, 林　磊

(华东师范大学 数学系,上海　200062)

摘要:作者利用特征 2 代数闭域上 G_2 的变形 V_3G, V_6G 和 V_7G 的阶化给出它们的导子代数和极小 p - 包络,分别给出了它们的一个最小生成元集。

关键词:导子代数; 最小生成元集; 特征 2

中图分类号:O153　　文献标识码:A

0　引　　言

典型李代数 G_2 为 14 维的单李代数,文[1]给出了普遍阶化 $U(\Gamma^-)$ 的构造(其中 Γ^- 为负的深度为 2 的 5 维李代数),尤其是在 $\mathrm{Char}\ F = 2$ 的代数闭域 F 上给出典型李代数 G_2 的变形 $V_iG(i = 3,\cdots,7)$,它们是几种新的单李代数。V_iG 和 G_2 一样也具有深度为 2 的阶化,总可以嵌入到海森伯格型普遍阶化李代数中,文[2]利用 G_2 的阶化给出了它的导子代数。本文将利用相同的方法给出它的变形 $V_iG(i = 3,6,7)$ 的导子代数。

在以下的讨论中,总是假定 $\mathrm{Char}\ F = 2$,并且所采用符号与[1]相同,设 V 为 $V_iG(i = 3, 6,7)$ 中任一个,V 有深度为 2 的阶化,有 $V = \oplus_{i=-2}^{2} V_i$,其中 $V_{-2} = \langle 1\rangle$, $V_{-1} = \langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle$, $V_0 = \langle h_1, h_2, e_1, \cdots, e_m\rangle(m = 2$, $V = V_3G$, V_6G; $m = 4$, $V = V_7G)$, $V_1 = \langle f_1, f_2, f_3, f_4\rangle$, $V_2 = \langle f_5\rangle$,对 V 中基的元素的具体表达式,我们罗列如下:

(1) $V_3G = V_3G(a)$,其中 $a \neq 0$

$$h_1 = x_1x_3 + x_2x_4,\ h_2 = x_1x_3 + x_5,$$
$$e_1 = x_1x_4 + ax_2^{(2)},\ e_2 = x_2x_3;$$
$$f_1 = ax_2^{(3)} + x_1x_2x_3 + x_1x_5,$$
$$f_2 = x_1x_2x_3 + x_2x_5,\ f_3 = x_3x_5,$$
$$f_4 = ax_2x_3^{(3)} + x_4x_5;$$
$$f_5 = ax_2x_2^{(3)}x_3 + x_1x_3x_5 + x_2x_4x_5.$$

(2) $V_6G = V_6G(a, s)$,其中 $a \neq 0$, $s \neq 0$

$$h_1 = x_1x_2 + ax_3x_4,\ h_2 = x_2x_4 + x_5,$$
$$e_1 = x_2^{(2)} + ax_3^{(2)},\ e_2 = sx_1x_4 + x_2x_3;$$

收稿日期:1999 - 06
基金项目:国家自然科学基金(19871028)和上海市重点学科建设项目
作者简介:李可峰(1972 -),男,讲师,现在山东济南大学数学系工作.

$$f_1 = ax_3^{(3)} + x_2^{(2)}x_3 + sx_1x_2x_4 + sx_1x_5,$$
$$f_2 = x_1x_2^{(2)} + ax_1x_3^{(2)} + ax_2x_3x_4 + ax_3x_5,$$
$$f_3 = x_2^{(2)}x_4 + ax_3^{(2)}x_4 + x_2x_5,$$
$$f_4 = a^{-1}x_2^{(3)} + x_2x_3^{(2)} + sx_4x_5;$$
$$f_5 = sx_1x_2^{(2)}x_4 + asx_1x_3^{(2)}x_4 + x_2^{(3)}x_3 + ax_2x_3^{(3)} + sx_1x_2x_5 + asx_3x_4x_5.$$

(3) $V_7G = V_7G(c)$,其中 $c \neq 0,1$

$$h_1 = x_1x_3 + x_2x_4,\ h_2 = cx_1x_3 + x_5,$$
$$e_1 = x_1x_2,\ e_2 = x_3x_4,\ e_3 = x_2x_3,\ e_4 = x_1x_4;$$
$$f_1 = cx_1x_2x_4 + x_1x_5,\ f_2 = cx_1x_2x_4 + x_2x_5;$$
$$f_3 = (c+1)x_2x_3x_4 + x_3x_5,\ f_4 = (c+1)x_1x_3x_4 + x_4x_5;$$
$$f_5 = (c+1)x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_5 + x_2x_4x_5.$$

并且 V 中李运算由下式给出

$$[f,g] = (D_5f)\Big(g - \sum_{i=1}^{2}(D_{2+i}g)x_{2+i}\Big) - (D_5g)\Big(f - \sum_{i=1}^{2}(D_{2+i}f)x_{2+i}\Big) + \sum_{i=1}^{2}((D_if)(D_{2+i}g) - (D_ig)(D_{2+i}f)),\quad \forall f,g \in V.$$

其中 D_i 是关于 x_i 求一次导,由此运算可以得出 V 具有以下性质:

引理 0.1[1] V_3G,V_6G 和 V_7G 分别是 14 维,14 维,16 维的非限制单李代数。

命题 0.1

(1) 在 V_3G 中存在自同构 $\phi_1 \in \mathrm{End}\,V_3G$,使得 $1 \to f_5$,$f_5 \to 1$,$x_i \to f_i$,$f_i \to x_i$,$e_j \to e_j$,$h_1 \to h_1$,$h_2 \to h_1 + h_2$($i = 1,\cdots,4$;$j = 1,2$),且 $\phi^2 = \mathrm{id}_{V_3G}$.

(2) 在 V_7G 中存在自同构 $\phi_2 \in \mathrm{End}\,V_7G$,使得 $1 \to f_5$,$f_5 \to 1$,$x_i \to f_i$,$f_i \to x_i$,$e_j \to e_j$,$h_1 \to h_1$,$h_2 \to h_1 + h_2$($i = 1,\cdots,4$;$j = 1,2$),且 $\psi^2 = \mathrm{id}_{V_7G}$.

上述命题直接验证即得,也可如文[2] 利用李代数的根系的自同构证明。

1 V 的导子代数

一个代数的导子代数可以作为其自同态的向量子空间。确定其导子代数的结构对研究它本身也具有一定的意义。在特征 0 代数闭域上有限维半单李代数的导子代数 $\mathrm{Der}\,L = \mathrm{ad}\,L$(参见[4] 中 Zassenhaus 定理)。而模李代数这一结果未必成立,故确定特征 2 代数闭域上单李代数 V(G_2 与它的变形) 的导子代数是有意义的。由于 Z – 阶化李代数的导子代数必定是 Z – 阶化的,可设 V 的导子代数为 L,则 $L = \oplus_{i\in Z}^{2}L_i$,其中 $L_i = \{D \in L \mid DV_j \subset V_{i+j},\ \forall j \in Z\}$。下面,我们将分别给出 V_iG($i = 3,6,7$) 的导子代数。

1.1 $V = V_6G$

利用 V_6G 深度为 2 的阶化求它的导子代数,需对它的每一层进行讨论。

引理 1.1.1

(1) $L = \oplus_{-2}^{2}V_i$;

(2) $L_1 = \mathrm{ad}\ V_1$,$L_{-1} = \mathrm{ad}\ V_{-1}$.

证明 (1) 因为 $V = \oplus_{i=-2}^{2}V_i$,所以 $L_i = 0$,$L_{-i} = 0$($i > 4$). 以下只需证明 $L_i = L_{-i} =$

$0(i = 3,4)$ 即可。

$i = 4$ 时,对 $\forall D \in L_4$,由于 $DV_{-2} = [DV_{-1}, V_{-1}] + [V_{-1}, DV_{-1}] = 0$, $DV_i = 0(i = -1,\cdots,2)$,所以 $D = 0$。从而 $L_4 = 0$。同理 $L_{-4} = 0$。

$i = 3$ 时,对 $\forall D \in L_3$,设 $D(x_i) = k_i f_5$. 由于 $1 = [x_1, x_3] = [x_2, x_4]$,有 $D(1) = D([x_1, x_3]) = D([x_2, x_4])$,即 $k_1 sf_3 + k_3 af_4 = k_2 f_1 + k_4 sf_2$,所以 $k_i = 0$. 于是 $DV_{-2} = DV_{-1} = 0$,从而 $L_3 = 0$. 同理有 $L_{-3} = 0$.

(2) 对 $\forall D \in L_1$,有 $D(1) \in V_{-1}$. 可设 $D(1) = \sum_{i-1}^{4} k_i x_i$,则

$$(D - \mathrm{ad}(s^{-1}k_1 f_1 + k_2 f_3 + a^{-1}k_3 f_2 + s^{-1}k_4 f_4))(1) = 0$$

不妨设 $D(1) = 0$. 由于 $DV_1 \subset V_2$,可设 $D(f_i) = l_i f_5 (i = 1,\cdots,4)$. 从而 $D(x_1) = D([1, s^{-1}f_1]) = l_1 h_1$, $D(x_2) = D([1, f_3]) = sl_3 h_1$, $D(x_3) = D([1, a^{-1}f_2]) = a^{-1}sl_2 h_1$, $D(x_4) = D([1, s^{-1}f_4]) = l_4 h_1$. 考虑 $D(x_i) = m_i h_1 (i = 1,\cdots,4)$,其中 m_i 就是 D 作用于 x_i 所得 h_1 的系数。利用 $D(f_5) = 0$, $[h_1, f_5] = 0$ 有 $D([x_i, f_5]) = 0$。从而 $D(f_i) = 0$, $D(x_i) = 0$。由于 V 可由 $V_{-1} \oplus V_1$ 生成,故 $DV = 0$。所以 $D = 0$, $L_1 = \mathrm{ad}\ V_1$.

对 $\forall D \in L_{-1}$,有 $D(f_5) \in V_1$,可设 $D(f_5) = \sum_{i=1}^{4} k_i f_i$,则

$$(D - \mathrm{ad}(k_1 x_4 + s^{-1}k_2 x_2 + s^{-1}k_3 x_3 + a^{-1}k_4 x_1))(f_5) = 0$$

不妨设 $D(f_5) = 0$. 由于 $DV_{-1} \subset V_{-2}$,可设 $D(x_i) = l_i \cdot 1 (i = 1,\cdots,4)$. 从而 $D(f_1) = D([x_4, f_5]) = l_4 h_1$, $D(f_2) = D([x_2, s^{-1}f_5]) = s^{-1}l_2 h_1$, $D(f_3) = D([x_3, s^{-1}f_5]) = s^{-1}l_3 h_1$, $D(f_4) = D([x_1, a^{-1}f_5]) = a^{-1}l_1 h_1$. 考虑 $D(f_i) = m_i h_1 (i = 1,\cdots,4)$,其中 m_i 就是 D 作用于 f_i 所得 h_1 的系数。利用 $D(1) = 0$, $[h_1, 1] = 0$ 有 $D([f_i, 1]) = 0$。从而 $D(x_i) = 0$, $D(f_i) = 0$. 由于 V 可由 $V_{-1} \oplus V_1$ 生成,故 $DV = 0$。所以 $D = 0$, $L_{-1} = \mathrm{ad}\ V_{-1}$.

引理 1.1.2

(1) $L_0 = \mathrm{ad}V_0 \oplus \langle \mathrm{ad}(x_1 x_3), \mathrm{ad}(x_2 x_4) \rangle$;

(2) $L_2 = \mathrm{ad}V_2 \oplus \langle (\mathrm{ad}f_1)^2, \xi \rangle$. 其中

$$\xi = \mathrm{ad}(x_1 x_2 x_3^{(2)} + x_2^{(2)} x_3 x_4 + a x_3^{(3)} x_4 + s x_1 x_4 x_5 + x_2 x_3 x_5)$$

(3) $L_{-2} = \mathrm{ad}V_{-2} \oplus \langle (\mathrm{ad}x_1)^2, \xi' \rangle$. 其中 ξ' 满足 $\xi'(f_5) = e_1$; $\xi'(f_1) = x_2$, $\xi'(f_4) = x_3$, $\xi'(f_2) = \xi'(f_3) = 0$; $\xi'(h_i) = \xi'(e_1) = 0(i = 1,2)$, $\xi'(e_2) = 1$; $\xi'(V_{-1}) = \xi'(V_{-2}) = 0$.

证明　(1) 首先,容易验证 $\mathrm{ad}_V(x_1 x_3)$, $\mathrm{ad}_V(x_2 x_4)$ 使 V 保持稳定,故它们确是 V 的导子,并且它们在 V_{-2} 的作用均为 0,在 V_2 的作用为恒等作用。

给定 $D \in L_0$。设 $D(1) = k \cdot 1$,则以 $D - \mathrm{ad}kh_2$ 代替 D,可设 $D(1) = 0$,设 $D(x_1) = \sum_{i=1}^{4} k_i x_i$。令 $\widetilde{D} = D - \mathrm{ad}(k_3 a^{-1} e_1 + k_2 e_2 + k_4 a^{-1} h_1) - k_1 \mathrm{ad}(x_1 x_3)$,则 $\widetilde{D}(x_1) = 0$,并且 $\widetilde{D}(1) = 0$。然后让 $\widetilde{D}$ 代替 D。由 $[1, e_1] = [1, e_2] = [1, h_1] = 0$, $[1, h_2] = 1$ 可知 $[1, DV_0] = 0$,故 $DV_0 \subset \langle e_1, e_2, h_1 \rangle$。

不妨设 D 以下面这种方式作用在 V_0 上:

$$\begin{cases} D(e_1) = k_{11} e_1 + k_{12} e_2 + k_{13} h_1 \\ D(e_2) = k_{21} e_1 + k_{22} e_2 + k_{23} h_1 \\ D(h_1) = k_{31} e_1 + k_{32} e_2 + k_{33} h_1 \\ D(h_2) = k_{41} e_1 + k_{42} e_2 + k_{43} h_1 \end{cases}$$

由 $ax_3 = [x_1, e_1]$ 可知 $D(ax_3) = [x_1, De_1] = ak_{11}x_3 + k_{12}x_2 + ax_{13}x_4$,从而 $D(x_3) = k_{11}x_3 + a^{-1}k_{12}x_2 + k_{13}x_4$。由于 $1 = [x_1, x_3]$,所以 $0 = D(1) = [x_1, Dx_3] = k_{11}\cdot 1$,故 $k_{11} = 0$。由于 $x_2 = [x_1, e_2]$,有 $D(x_2) = [x_1, De_2] = ak_{21}x_3 + k_{22}x_2 + ak_{23}x_4$。利用 $[x_1, x_2] = 0$,有 $0 = D([x_1, x_2]) = [x_1, Dx_2] = ak_{21}\cdot 1$,从而 $k_{21} = 0$。

因为 $ax_4 = [x_1, h_1]$,有 $D(ax_4) = [x_1, Dh_1] = ak_{31}x_3 + k_{32}x_2 + ak_{33}x_4$,于是 $D(x_4) = [x_1, Dh_1] = k_{31}x_3 + a^{-1}k_{32}x_2 + k_{33}x_4$. 由于 $[x_1, h_2] = x_1$,有 $0 = D(x_1) = D([x_1, h_2]) = [x_1, Dh_2] = ak_{43}x_3 + k_{42}x_2 + ak_{43}x_4$,所以 $k_{4j} = 0(k = 1,2,3)$。

由于 $[x_2, x_4] = 1$,有 $0 = D([x_2, x_4]) = k_{33}\cdot 1 + k_{22}\cdot 1$,即 $k_{22} = k_{33}$。而 $[x_2, x_3] = 0$,有 $0 = D([x_2, x_3]) = k_{13}\cdot 1$,故 $k_{13} = 0$。利用 $[x_3, e_1] = 0$,有 $0 = D([x_3, e_1]) = sk_{12}x_4$,即 $k_{12} = 0$,所以 $D(x_3) = 0$。另一方面,从 $x_2 = [x_4, e_1]$ 可知 $D(x_2) = [Dx_4, e_1] = k_{33}, k_{22}x_2 + ak_{23}x_4 = k_{33}x_2$,所以 $k_{23} = 0$。再者因 $x_2 = [x_3, h_1]$,有 $D(x_2) = [x_3, Dh_1]$,得 $k_{22}x_2 = sk_{32}x_4 + k_{22}$, $k_{32} = 0$。又由于 $sh_1 = [1, f_5]$,知 $D(f_5) = k_{22}f_5$。

综上所述,D 在 V 上的作用为

$$D(1) = 0, \quad D(f_5) = k_{22}f_5$$

$$\begin{cases} D(x_1) = 0 \\ D(x_2) = k_{22}x_2 \\ D(x_3) = 0 \\ D(x_4) = k_{22}x_4 \end{cases} \quad \begin{cases} D(e_1) = 0 \\ D(e_2) = k_{22}e_2 \\ D(h_1) = k_{22}h_1 \\ D(h_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} D(f_1) = 0 \\ D(f_2) = 0 \\ D(f_3) = k_{22}f_3 \\ D(f_4) = k_{22}f_4 \end{cases}$$

所以 $D = k_{22}\mathrm{ad}(x_2x_4)$。

(2) 由于 $(\mathrm{ad}f_1)^2, \xi$ 使得 V 稳定,故它们确是 V 的导子,属于 L_2。又因为

$$\mathrm{ad}f_5(1) = sh_1, (\mathrm{ad}f_1)^2(1) = se_1, \xi(1) = e_2,$$

所以它们线性无关,只需再证 若 $D \in L_2, D(1) = kh_2$,则 $D = 0$。

显然 $D(h_2) \in \langle f_5\rangle$,利用 $1 = [1, h_2], [1, f_5] = sh_1$ 知 $kh_2 = D(1) = [D(1), h_2] + [1, D(h_2)] \in \langle h_1\rangle$,得 $k = 0$,故 $D(1) = 0$。又因为 $DV_1 = 0$,利用 $sx_1 = [1, f_1]$, $x_2 = [1, f_3]$, $ax_3 = [1, f_2]$, $sx_4 = [1, f_4]$ 得 $D(x_i) = 0(i = 1, \cdots, 4)$,即 $DV_{-1} = 0$ 从而 $DV_0 = [V_{-1}, DV_1] = 0$,故 $D = 0$。

(3) 由于 $(\mathrm{ad}x_1)^2, \xi'$ 使得 V 稳定,故它们确是 V 的导子,属于 L_{-2}。又因为

$$\mathrm{ad}1(f_5) = sh_1,\ \mathrm{ad}1(x_1)^2(f_5) = ae_2,\ \xi'(f_5) = e_1,$$

所以它们线性无关。只需再证 若 $D \in L_{-2}$, $D(f_5) = kh_2$,则 $D = 0$。

显然 $D(h_2) \in \langle 1\rangle$,利用 $f_5 = [f_5, h_2], [1, f_5] = sh_1$ 知 $kh_2 = D(f_5) = [D(f_5), h_2] + [f_5, D(h_2)] \in \langle h_1\rangle$,得 $k = 0$,故 $D(f_5) = 0$。又因为 $DV_{-1} = 0$,利用 $V_1 = [V_{-1}, V_2]$ 得 $D(f_i) = 0(i = 1, \cdots, 4)$,即 $DV_1 = 0$ 从而 $DV_0 = 0$,故 $D = 0$。

定理 1.1 V 的导子代数有如下性质:

(1) $L = \mathrm{ad}V \oplus \langle \mathrm{ad}(x_1x_3), \mathrm{ad}(x_2x_4), (\mathrm{ad}f_1)^2, \xi, \xi', (\mathrm{ad}x_1)^2\rangle$,其中

$$\xi = \mathrm{ad}(x_1x_2x_3^{(2)} + x_2^{(2)}x_3x_4 + ax_3^{(3)}x_4 + sx_1s_4x_5 + x_2x_3x_5),$$

ξ' 在 V 上的作用如同引理 1.1.2(3);

(2) $L = \mathrm{ad}V \oplus \langle (\mathrm{ad}f_1)^2, (\mathrm{ad}x_1)^2, \mathrm{ad}(x_1x_3 + x_2x_4)\rangle$ 是 V 的极小 p – 包络代数;

(3) $\mathscr{L}=\mathrm{Der}_F V/\mathrm{ad}\,V$ 是六维可解李代数。

证明　(1) 的证明是显然的。

(2) $p=2$。由于变形 V 是单李代数，可通过自同构 $\mathrm{ad}: x\to \mathrm{ad}x$ 嵌入到 L' 中。由于单李代数的 $[p]$ 映射是 $x^{[p]}=x^p(\forall x\in V)$，又注意到 $(\mathrm{ad}f_1)^2=(\mathrm{ad}f_2)^2=a(\mathrm{ad}f_3)^2=a^{-2}(\mathrm{ad}f_4)^2$，$(\mathrm{ad}x_1)^2=a(\mathrm{ad}x_4)^2$，$(\mathrm{ad}x_2)^2=(\mathrm{ad}x_3)^2=0$；$(\mathrm{ad}e_1)^2=0$，$\mathrm{ad}(x_1x_3+x_2x_4)=s^{-1}(\mathrm{ad}e_2)^2=a^{-1}(\mathrm{ad}h_1)^2$，$(\mathrm{ad}h_2)^2=\mathrm{ad}h_2$，$\mathrm{ad}(x_1x3+x_2x_4)^2=\mathrm{ad}(x_1x_3+x_2x_4)$。故 L' 本身是限制李代数，在同构意义上 L' 是 V 的 $p-$ 包络代数。而利用[4] 中定理 5.8(3) 可以验证 L' 是极小的。

(3) $\mathscr{L}$ 是由 ξ_1，$\mathrm{ad}(x_1,x_3)$，$\mathrm{ad}(x_2,x_4)$，$(\mathrm{ad}f_1)^2$，ξ，$\mathrm{ad}(x_1)^2$，ξ' 在 $\mathscr{L}$ 中的象生成的李代数，且它们线性无关，故 $\dim\mathscr{L}=6$。同时 $\mathscr{L}^{(2)}=0$，所以 $\mathscr{L}$ 是可解的。

1.2　$V=V_3G$，V_7G

V_3G，V_7G 分别有一个使正负阶化对称的平方为恒等映射的自同构 ϕ_1，ϕ_2，从而有：

引理 1.2.1　$L_{-i}\cong L_i$，$\forall i\in \boldsymbol{N}$。

应用[3]，用 V 的自同构诱导 L 的自同构即可得到。与 V_6G，G_2 的导子代数证明类似，可以得到：

定理 1.2　V_3G 的导子代数 L 有如下性质：

(1) $L=\mathrm{ad}V\oplus\langle \mathrm{ad}V(ax_1x_2^{(2)}x_3+ax_2^{(2)}x_5+x_1x_4x_5)$，$\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)$，$\mathrm{ad}_V(x_1x_2)$，$\mathrm{ad}_V(x_3x_4)$，$\rho_1$，$\rho_2\rangle$，其中

$$\rho_1=\phi_1\mathrm{ad}_V(ax_1x_2^{(2)}x_3+ax_2^{(2)}x_5+x_1x_4x_5)\phi_1^{-1},$$
$$\rho_2=\phi_1\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)\phi_1^{-1}.$$

L 的中心 $C(L)=0$。

(2) $L'=\mathrm{ad}V\oplus\langle \mathrm{ad}(x_2x_3x_5)$，$\rho_2$，$\mathrm{ad}(x_1x_2)\rangle$ 为 V_3G 的极小 $p-$ 包络。

(3) V 的外导子代数 $\mathscr{L}=\mathrm{Der}V/\mathrm{ad}V$ 是一个六维可解李代数。

定理 1.3　V_7G 的导子代数 L 有如下性质：

(1) $L=\mathrm{ad}V\oplus\langle \mathrm{ad}(x_2x_4)\rangle$；

(2) L' 是 V 的极小 $p-$ 包络代数；

(3) V 的外导子代数 $\mathscr{L}=\mathrm{Der}_F V/\mathrm{ad}V$ 同构于一维李代数。

文[7] 给出 G_2 的其它两个变形 V_4G，V_5G 的导子代数。这样，G_2 及其变形的导子代数已完全确定。

2　最小生成元集

李代数最小生成元集的讨论是比较重要的。我们知道特征 0 域上的单李代数可以由两个元素生成([5])，更好的结果是在域 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{R}$ 上的单李代数 L 满足：任给 $0\neq x\in L$，总存在 $y\in L$，使得 x，y 生成李代数 L。特征 0 域上的典型单李代数 G_2 也可由两个元素生成([6])。对于模李代数还没有明确的结论。有限维 $Z-$ 阶化单李代数 $L=\oplus_{-r}^{s}L_i$ 若满足 $L_i=(L_{-1})^{-i}(i<0)$，则 $L_i=L_{-1}L_{i+1}(-r\leqslant i\leqslant s-1)$。从而 L 可由 $L_{-1}\oplus L_s$ 生成([4])。利用命题 1.1，$V(V_3G,V_7G)$ 可由 $L_{-1}\oplus L_2$ 生成，也可由 $L_{-2}\oplus L_1$ 生成。但我们更感兴趣的是 L 的最小齐次生成元集。本节的目的之一就是给出 $V_iG(i=3,6,7)$ 的一个最小齐次生成元集。由于这些代数都是非一维的，故只要给出只有两个元素的生成元集即是最小的，由此可以说明它们均

可由两个元素生成。在本小节,$\langle x,y\rangle$ 表示由元素 x,y 生成的单李代数。

定理 2.1 V_3G,V_6G 和 V_7G 的一个齐次最小生成元集分别是:

(1) $V_3G=\langle f_4,x_1+x_3\rangle,(a\neq 1)$;

(2) $V_6G=\begin{cases}\langle f_1+f_4,x_1\rangle, & (a\neq 1)\\ \langle f_1+f_3,x_1\rangle, & (a=1,s\neq 1)\\ \langle f_1+f_3+f_4,x_1\rangle, & (a=1,s=1);\end{cases}$

(3) $V_7G=\langle f_1+f_2+f_4,\ x_2+cx_3+(c+1)x_4\rangle,(c\neq 0,1)$

证明 分别讨论 G_2 的这几个变形 $V_iG(i=3,6,7)$。

(1) 设 $M=\langle f_4,x_1+x_3\rangle$。对 M 中元素应用引言中给出的李运算,有 $[f_4,x_1+x_3]=e_1$, $[f_4,e_1]=af_2$。由于 $a\neq 0$,得 f_2。因为 $[e_1,x_1+x_3]=x_4$,进而有 $[f_2,f_4]=f_5$, $[x_4,f_2]=h_2$, $[x_1+x_3,h_2]=x_3$ 得 x_1。因为 $[x_1,x_3]=1$,$[1,f_2]=x_2$,我们就得到 $(V_3G)_2\oplus(V_3G)_{-1}$,所以 $M=V_3G$。

(2) 设

$$M=\begin{cases}\langle f_1+f_4,\ x_1\rangle, & (a\neq 1)\\ \langle f_1+f_3,x_1\rangle, & (a=1,\ s\neq 1)\\ \langle f_1+f_3+f_4,x_1\rangle, & (a=1,\ s=1)\end{cases}$$

由于 M 中参数的取值范围不同,需分几种情况分别讨论。

i) $a\neq 1$,$M=\langle f_1+f_4,x_1\rangle$.

由 $[f_1+f_4,x_1]=e_1+e_2$,$[x_1,e_1+e_2]=ax_3+x_2$,$[x_1+ax_3+x_2]=a\cdot 1$ 得 1. 由 $[ax_3+x_2,\ e_1+e_2]=asx_4+sx_1$ 得 x_4,进而 $[x_4,\ e_1+e_2]=x_2+x_3$,结合 ax_3+x_2 得 x_2,x_3。另一方面,由 $[f_1+f_4,\ e_1+e_2]=sf_2+a^{-1}sf_2$ 知 f_2,于是 $[f_1+f_4,f_2]=f_5$。故已有 $(V_6G)_{-1}\oplus(V_6G)_2$。

ii) $a=1,s\neq 1$, $M=\langle f_1+f_3,\ x_1\rangle$.

由 $[f_1+f_3,\ x_1]=e_1+h_1$,$[x_1,e_1+h_1]=x_3+x_4$,$[x_1,x_3+x_4]=1$ 知 1。由 $[1,f_1+f_3]=sx_1+x_2$ 得 x_1,x_2,进而 $[x_2,e_1+h_1]=x_3$,结合 x_3+x_4 得 x_3,x_4。另一方面,由 $[f_1+f_3,e_1+h_1]=(s+1)f_2+f_4$,$[(s+1)f_2+f_4,h_1+e_1]=(s+1)f_3+f_1$,$[f_1+f_3,(s+1)f_3+f_1]=s\cdot f_5$ 知 f_5,于是有 $(V_6G)_{-1}\oplus(V_6G)_2$。

iii) $a=s=1$, $M=\langle f_1+f_3+f_4,x_1\rangle$。

由 $[f_1+f_3+f_4,x_1]=e_1+e_2+h_1$,$[x_1,e_1+e_2+h_1]=x_4+x_3+x_2$,$[x_1,x_4+x_3+x_2]=1$ 知 1。由 $[1,f_1+f_3+f_4]=x_1+x_2+x_4$ 得 x_2+x_4,x_3,进而由 $[x_3,f_1+f_3+f_4]=h_2$,$[h_2,f_1+f_3+f_4]=f_3$,$[1,f_3]=x_2$ 得 x_4。于是 $[f_1+f_3+f_4,f_3]=f_5$。故得到 $(V_6G)_{-1}\oplus(V_6G)_2$。

综上所述,李代数 $M=V_6G$。

(3) 设 $M=\langle f_1+f_2+f_4,\ x_2+cx_3+(c+1)x_4\rangle$,利用引言中给出的李运算,有

$[f_1+f_2+f_4,\ x_2+cx_3+(c+1)x_4]$

$=(c+1)e_1+c(c+1)e_2+c^2e_3+c(c+1)e_4+(c^2+1)h_1$,

$[f_1+f_2+f_4,(c+1)e_1+c(c+1)e_2+c^2e_3+c(c+1)e_4+(c^2+1)h_1]$

$=(c^2+1)f_1+c^2f_2+cf_3+(c^2+1)f_4+(c^2+1)(f_1+f_2+f_4)$

知 $f_1+cf_3+f_4,f_2+cf_3$。由 $[f_1+f_2+f_4,f_1+cf_3+f_4]=(c+1)f_5$ 得 f_5。知 $f_2+cf_3+(c+$

$1)f_4$，得 f_4, f_1+f_2, f_1+cf_3。由于

$$[x_2+cx_3+(c+1)x_4, f_1+f_2]=(c+1)e_1+c^2e_3+c(c+1)e_4+c^2h_1+h_2$$

与 $(c+1)e_1+c(c+1)e_2+c^2e_3+c(c+1)e_4+(c^2+1)h_1$ 比较可知 $c(c+1)e_2+h_1+h_2$. $[c(c+1)e_2+h_1+h_2, f_1+f_2]=c(c+1)f_4+(c^2+1)f_3+f_2+(c+1)f_1$，得到 f_3, f_1, f_2, f_4。再由 $[x_2+cx_3+(c+1)x_4, c(c+1)e_2+h_1+h_2]=(c+1)x_4$ 得 x_4. $[x_2+cx_3+(c+1)x_4, x_4]=1$。得到 $(V_7G)_{-2}\oplus(V_7G)_1$（注意到 $c\neq 0,1$）。所以 $M=V_7G$。

[参　考　文　献]

[1] Shen Guangyu. Variations of the classical Lie algebra G_2 in low characteristics[J]. Nova J of Algebra and Geometry, 1993, 3(2): 217~243.

[2] 林磊. 特征 2 域上的李代数 G_2 的导子代数[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 1997, 1: 8~11.

[3] 林磊. 特征 2 李代数[D]. 华东师范大学博士论文, 1990.

[4] Strade H, Farnsteiner R. Modular Lie Algebra and Their Representations[M]. New York: Dekker, 1988.

[5] Kuranishi M. On everywhere dense imbeddings of free groups in Lie groups[J]. Nagoya Math J, 1951, 2: 63~67.

[6] Ionescu T. On the generators of semisimple Lie algerba[J]. Linear Algebra Appl, 1976, 15: 271~292.

[7] Liu Dong. On the variations of simple Lie algbra G_2 of characteristic. 华东师范大学硕士论文, 1998, 2.

Derivation Algebras of Variations of Lie Algebra G_2 in Characteristic 2

LI Ke-feng,　LIN Lei

(*Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*)

Abstract: In this paper, we determine the derivation algebras of variations V_3G, V_6G and V_7G of Lie algebra G_2 over an algebraically closed field of characteristic 2 and their minimal p-envelopes. Also, minimal generating sets of algebras V_3G, V_6G and V_7G are given.

Key words: derivation algebras; minimal generating sets; characteristic 2