数 学 年 刊
18A: 3(1997),293-298

(4)293-298

5 维 Bernstein-Jordan 代数的导子代数**

O153.3

林 磊*

提 要

I. Correa 和 L. A. Peresi 对实数域上的 5 维 Bernstein-Jordan 代数进行了分类. 本文在此基础上, 确定了这些代数的导子代数.

关键词 Bernstein-Jordan 代数, 导子代数, 实数域

B-J代数

非结合代数

MR (1991) 主题分类 17A10, 17B40, 17C99

中图法分类 O153.3

Bernstein 代数这一概念是由 P. Holgate 在考虑对在第二代达到平衡的人口进行分类的 Bernstein 问题时提出的 [1].

域 K 上的交换的非结合代数 A 叫做 Bernstein 代数, 如果存在一个非零的代数同态 $\omega: A \to K$, 满足条件

$$x^2x^2 = \omega(x)^2x, \quad \forall x \in A.$$

同态 ω 是唯一确定的, 称为 A 的权函数.

Jordan 代数 A 是一个交换的非结合代数, 并满足条件

$$(x^2y)x - x^2(yx) = 0, \quad \forall x, y \in A.$$

实数域上的 5 维 Bernstein–Jordan 代数已由巴西学者 I. Correa 和 L. A. Peresi 给出了分类 [2]. 他们证明了共有 20 个不同构的实 5 维 Bernstein–Jordan 代数.

域 K 上的代数 A 的线性变换 δ 称为 A 的导子, 若 δ 满足

$$\delta(xy) = x(\delta y) + (\delta x)y, \quad \forall x, y \in A.$$

A 上的导子全体组成的集合记为 $\mathrm{Der}A$, 称为 A 的导子代数. $\mathrm{Der}A$ 是一个李代数 [3]. 本文的目的是要确定这 20 个代数的导子代数. 本文中所用的符号与 [2] 相同.

以下我们总假设 A 是一个以 ω 为权函数的实数域 $\mathbb{R}$ 上的有限维 Bernstein–Jordan 代数. 设 e 是 A 的一个幂等元. 则 $A = \mathbb{R}e \oplus N$, 其中

$$N = \{x \in A \mid \omega(x) = 0\}.$$

本文 1996 年 4 月 2 日收到.

*华东师范大学数学系, 上海 200062.

**国家教委博士点基金资助的项目.

则 $N = U \oplus Z$, 其中

$$U = \{n \in N \mid en = \frac{1}{2}n\}, \quad Z = \{n \in N \mid en = 0\}.$$

子空间 U, Z 满足条件

$$U^2 \subset Z, \quad UZ \subset U, \quad Z^2 = 0. \tag{1}$$

设 $r = \dim U$, $s = \dim Z$, 则 $(r+1, s)$ 是 A 的不变量，称为 A 的型. 在 A 中选定一组基 $e, u_1, \cdots, u_r, z_1, \cdots, z_s$, 其中 $u_1, \cdots, u_r \in U$, $z_1, \cdots, z_s \in Z$, 则 $\mathrm{Der}A$ 同构于 $gl(1+r+s, \mathbb{R})$ 的一个子代数.

任给 $\delta \in \mathrm{Der}A$, 设

$$\begin{cases} \delta e = ae + \sum\limits_{j=1}^{r} a_j u_j + \sum\limits_{j=1}^{s} a'_j z_j, \\ \delta u_i = b_i e + \sum\limits_{j=1}^{r} b_{ji} u_j + \sum\limits_{j=1}^{s} b'_{ji} z_j, \quad i = 1, \cdots, r, \\ \delta z_i = c_i e + \sum\limits_{j=1}^{r} c'_{ji} u_j + \sum\limits_{j=1}^{s} c_{ji} z_j, \quad i = 1, \cdots, s. \end{cases}$$

引理 1　设 $A = \mathbb{R}e \oplus N$ 是 Bernstein–Jordan 代数，$\delta \in \mathrm{Der}A$, 则

(i) $\delta e \in U$, $\delta U \subset N$, $\delta Z \subset N$;

(ii) 若 $U^2 = 0$, 则 $\delta U \subset U$;

(iii) 若 $UZ = 0$, 则 $\delta Z \subset Z$.

证　由 $e^2 = e$ 得 $\delta e = 2e\delta e$. 所以

$$\delta e = 2e(ae + \sum a_j u_j + \sum a'_j z_j) = 2ae + \sum a_j u_j.$$

得 $a = 0$, $a'_j = 0$, $j = 1, \cdots, s$. 故 $\delta e \in U$.

由 $\frac{1}{2}u_i = eu_i$ 得 $\frac{1}{2}\delta u_i = (\delta e)u_i + e(\delta u_i)$, 因此

$$\frac{1}{2}\delta u_i = \sum_j a_j u_j u_i + b_i e + \frac{1}{2}\sum_j b_{ji} u_j.$$

由于 $U^2 \subset Z$, 故 $b_i = 0$, 即 $\delta U \subset N$. 若 $U^2 = 0$, 则 $\frac{1}{2}\delta u_i = \frac{1}{2}\sum\limits_j b_{ji} u_j$, 得 $\delta U \subset U$.

由 $ez_i = 0$ 得 $(\delta e)z_i + e(\delta z_i) = 0$, 故

$$\sum_j a_j u_j z_i + c_i e + \frac{1}{2}\sum_j c'_{ji} u_j = 0.$$

又因 $UZ \subset U$, 故得 $c_i = 0$, 即 $\delta Z \subset N$. 假设 $UZ = 0$, 则 $\frac{1}{2}\sum\limits_j c'_{ji} u_j = 0$, 从而 $\delta Z \subset Z$.

定理 1　设 A 是 Bernstein–Jordan 代数，且 $N^2 = 0$, 则任给 $\delta \in \mathrm{Der}A$, 有

$$\delta e \in U, \quad \delta U \subset U, \quad \delta Z \subset Z. \tag{2}$$

反之，若 δ 是 A 上的线性变换，且满足 (2), 则 $\delta \in \mathrm{Der}A$.

证　任给 $\delta \in \mathrm{Der}A$, 由 $N^2 = 0$ 得 $U^2 = UZ = 0$, 故由引理 1 知 δ 满足 (2).

反之，若 δ 是 A 的线性变换，且满足 (2), 则直接验证知 $\delta \in \mathrm{Der}A$.

推论 1　设 A 是 Bernstein–Jordan 代数，且 $N^2 = 0$, 若 A 是 $(r+1, s)$ 型的，则 $\dim\mathrm{Der}A = r + r^2 + s^2$.

下面，我们来考虑 5 维 Bernstein–Jordan 代数.

I　$N^2=0$

在此情形下，由定理 1 知 Der$A$ 由满足 (2) 的 A 上所有线性变换所组成.

(i) A 为 (1,4) 型时，$\dim\mathrm{Der}A=16$;

(ii) A 为 (2,3) 型时，$\dim\mathrm{Der}A=11$;

(iii) A 为 (3,2) 型时，$\dim\mathrm{Der}A=10$;

(iv) A 为 (4,1) 型时，$\dim\mathrm{Der}A=13$;

(v) A 为 (5,0) 型时，$\dim\mathrm{Der}A=20$.

II　$\dim N^2=1$.

II.1　$e^2=e$, $eu_i=\frac{1}{2}u_i$, $u_i^2=\alpha_i z_1$, $i=1,\cdots,r$. (我们只列出基中元素间的非零乘积，以下同.)

由于 $N^2\subset Z$, 故据 (1) 知，$UZ=0$. 所以由引理 1, 任给 $\delta\in\mathrm{Der}A$, 有 $a=a'_j=0$, $j=1,\cdots,s$; $b_i=0$, $i=1,\cdots,r$; $c_i=c'_{ji}=0$, $i=1,\cdots,s$, $j=1,\cdots,r$.

由 $eu_i=\frac{1}{2}u_i$ 得

$$\delta u_i=\sum_j b_{ji}u_j+2a_i\alpha_i z_1.$$

设 $i\neq i'$, 则 $u_iu_{i'}=0$, 从而 $b_{i'i}\alpha_{i'}+b_{ii'}\alpha_i=0$. 又由 $u_i^2=\alpha_i z_1$, 得

$$c_{21}=c_{31}=\cdots=c_{s1}=0,\quad c_{11}=2b_{11},\quad b_{ii}=b_{11},\ \forall i \text{ 使 } \alpha_i\neq 0.$$

设 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, 我们有

定理 2　设 A 是 II.1 情形的 5 维 Bernstein–Jordan 代数，则 Der$A$ 同构于 $gl(5,\mathbb{R})$ 的子代数 $L(A)$, 其中

(i) 当 $r=3$, $\alpha=(1,0,0)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & b_{11} & 0 & 0 & 0\\ a_2 & b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0\\ a_3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0\\ 0 & 2a_1 & 0 & 0 & 2b_{11}\end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim\mathrm{Der}A=10$;

(ii) 当 $r=3$, $\alpha=(1,1,0)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0\\ a_2 & -b_{12} & b_{11} & 0 & 0\\ a_3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0\\ 0 & 2a_1 & 2a_2 & 0 & 2b_{11}\end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim\mathrm{Der}A=8$;

(iii) 当 $r=3$, $\alpha=(1,-1,0)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0\\ a_2 & b_{12} & b_{11} & 0 & 0\\ a_3 & b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0\\ 0 & 2a_1 & -2a_2 & 0 & 2b_{11}\end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 8$;

(iv) 当 $r=3$, $\alpha=(1,1,1)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ a_2 & -b_{12} & b_{11} & b_{23} & 0 \\ a_3 & -b_{13} & -b_{23} & b_{11} & 0 \\ 0 & 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 & 2b_{11} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 7$;

(v) 当 $r=3$, $\alpha=(1,1,-1)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ a_2 & -b_{12} & b_{11} & b_{23} & 0 \\ a_3 & b_{13} & b_{23} & b_{11} & 0 \\ 0 & 2a_1 & 2a_2 & -2a_3 & 2b_{11} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 7$;

(vi) 当 $r=2$, $\alpha=(1,0)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 0 & 2b_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{22} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 7$;

(vii) 当 $r=2$, $\alpha=(1,1)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ a_2 & -b_{12} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 2a_2 & 2b_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{22} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 6$;

(viii) 当 $r=2$, $\alpha=(1,-1)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ a_2 & b_{12} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & -2a_2 & 2b_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{22} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 6$;

(ix) 当 $r=1$, $\alpha=(1)$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 2b_{11} & c_{12} & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 & c_{22} & c_{23} \\ 0 & 0 & 0 & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 8$.

II.2 $\quad e^2=e$, $eu_i=\frac{1}{2}u_i$, $i=1,2,3$, $u_1z_1=u_3$.

此时， $U^2=0$, 故由引理 1, $\delta U\subset U$. 经计算有

定理 3 设 A 是 II.2 情形的 5 维 Bernstein–Jordan 代数，则 Der$A$ 同构于 $gl(5,\mathbb{R})$ 的子代数 $L(A)$, 其中 $L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ a_3 & b_{31} & b_{32} & b_{11}+c_{11} & -2a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{11} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim\mathrm{Der}A=9$.

II.3 $\quad e^2=e,\ eu_i=\frac{1}{2}u_i,\ i=1,2,\ u_1z_1=u_2$.

与 II.2 情形类似的计算，可得

定理 4 设 A 是 II.3 情形的 5 维 Bernstein–Jordan 代数，则 Der$A$ 同构于 $gl(5,\mathbb{R})$ 的子代数 $L(A)$, 其中 $L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_{21} & b_{11}+c_{11} & -2a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim\mathrm{Der}A=8$.

注 本文把 [2] 中 II.1–II.3 的情形合并为 II.1, 以便统一计算.

III $\quad \dim N^2=2$. 此时 A 为 (3.2) 型.

III.1 $\quad e^2=e,\ eu_i=\frac{1}{2}u_i,\ i=1,2,\ u_1^2=z_1,\ u_1z_2=u_2$.

定理 5 设 A 是 III.1 情形的 5 维 Bernstein–Jordan 代数，则 Der$A$ 同构于 $gl(5,\mathbb{R})$ 的子代数 $L(A)$, 其中 $L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_{21} & b_{11}+c_{22} & 0 & -2a_1 \\ 0 & 2a_1 & 0 & 2b_{11} & c_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{22} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim\mathrm{Der}A=6$;

III.2 $\quad e^2=e,\ eu_i=\frac{1}{2}u_i,\ i=1,2,\ u_1^2=z_1,\ u_1u_2=z_2,\ u_2^2=\lambda Z_1,\ \lambda\in\{0,1,-1\}$.

定理 6 设 A 是 III.3 情形的 5 维 Bernstein–Jordan 代数，则 Der$A$ 同构于 $gl(5,\mathbb{R})$ 的子代数 $L(A)$, 当 $\lambda=0$ 时， $L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_{21} & b_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 0 & 2b_{11} & 0 \\ 0 & 2a_2 & 2a_1 & 2b_{21} & b_{11}+b_{22} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim\mathrm{Der}A=5$;

当 $\lambda\neq 0$ 时，$L(A)$ 由所有形如

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_{11} & \lambda b_{21} & 0 & 0 \\ a_2 & b_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 2a_1 & 2\lambda a_2 & 2b_{11} & 2\lambda b_{21} \\ 0 & 2a_2 & 2a_1 & 2b_{21} & 2b_{11} \end{pmatrix}$$

的矩阵所组成，从而 $\dim \mathrm{Der} A = 4$.

参 考 文 献

[1] Holgate, P., Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc.*, **9**:2 (1975), 613-623.

[2] Correa, I. & Peresi, L. A., Bernstein-Jordan algebras of dimension five, *Algebra, Groups and Geometries,* **11** (1994), 397-402.

[3] Humphreys, J. E., Introduction to Lie algebras and representation theory, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1972. (中译本： 李代数及其表示理论导引，陈志杰译，曹锡华校，上海科学技术出版社出版， 1981).