一九九七年 华东师范大学学报（自然科学版） No. 1
第一期 Journal of East China Normal University (Natural Science) 1997

②

8-11

特征 2 域上的李代数 G_2 的导子代数*

林 磊
（华东师范大学数学系 上海 200062）

O152.5

提要 本文利用把特征 2 域上的典型李代数 G_2 嵌入 Cartan 型李代数 $K(5)$ 的结果，确定了 G_2 的导子代数以及外导子代数。

关键词 导子代数，特征 2 李代数 G_2 外导子代数
中图分类号 O153.3

1 李代数 G_2

我们知道，如果 V 是特征 0 的代数闭域 F 上的有限维半单李代数（例如 G_2），那么 $\mathrm{Der}V=\mathrm{ad}V$（即 L 的每一导子都是内导子），参见 [3,5.3]。但是当 $\mathrm{char}F=p>0$ 时，这一结果是不成立的，其主要原因是 Killing 的这一有力工具在此失效了。本文的目的在于确定 $p=2$ 时，典型李代数 G_2 的导子代数。通过计算，可以看出此时 G_2 有外导子存在。我们还将计算 G_2 的外导子代数。

设 Φ 是 G_2 的根系，α，β 分别是短单根和长单根。设 $H=\langle h_\alpha,h_\beta\rangle$ 是 Cartan 子代数，$\{h_\alpha,h_\beta,\ x_\mu|\mu\in\Phi\}$ 是 G_2 的 Chevalley 基。定义 $(G_2)_i=\langle x_\gamma|\gamma=j\alpha+i\beta\in\Phi\rangle$，$i\neq 0$，$(G_2)_0=\langle h_\alpha,h_\beta,\ x_\alpha,\ x_{-\alpha}\rangle$，则 $G_2=\oplus_{i=-2}^{2}(G_2)_i$ 是一个深度为 2 的阶化李代数。

在以下的讨论中，总假设 $p=2$。则 G_2^- 同构于 5 维的 Heisenberg 代数，故 G_2 可嵌入 $K(5)$（它是 Heisenberg 型的普遍阶化李代数）中，参见 [1]。以下的记号基本上都与 [1] 中相同。令 $V=\oplus_{i=-2}^{2}V_i\subset K(5)$，$V_{-2}=\langle 1\rangle$，$V_{-1}=\langle x_1,x_2,x_3,x_4\rangle$，$V_0=\langle h_1,h_2,e_1,e_2\rangle$，$V_1=\langle f_1,f_2,f_3,f_4\rangle$，$V_2=\langle f_5\rangle$，其中

$$h_1=x_1x_3+x_2x_4,\ h=x_2x_4+x_5,\ e_1=x_1x_4,\ e_2=x_2x_3;$$

$$f_1=x_1x_2x_4+x_1x_5,\ f_2=x_1x_2x_3+x_2x_5,\ f_3=x_3x_5,\ f_4=x_4x_5;$$

$$f_5=x_1x_3x_5+x_2x_4x_5.$$

那么我们有

定理 1.1 [1]V 是同构于 G_2 的特征 2 的限制单李代数。

定理 1.2 设 $\varphi_1\in\mathrm{End}V$，使得

---

* 国家自然科学基金资助课题。
本文于 1995 年 6 月 15 日收到.

$1\to f_5$, $f_5\to 1$, $x_i\to f_i$, $f_i\to x_i$, $i=1,\cdots,4$, $e_1\to e_1$, $e_2\to e_2$, $h_1\to h_1$, $h_2\to h_1+h_2$，则 φ_1 是 V 的自同构，且 $\varphi_1^2=\mathrm{id}_V$。

证明 直接验证即得。事实上，若令 $\Delta=\{\alpha,\beta\}$，$\Delta'=\{\alpha,-(3\alpha+\beta)\}$，则 Δ，Δ' 都是 Φ 的基，故 $\alpha\to\alpha$，$\beta\to-(3\alpha+\beta)$ 决定了 Φ 的一个自同构。而 φ_1 就是由这一根系的自同构所诱导出的 G_2 的自同构。

定理 1.3 设 $\varphi_2\in\mathrm{End}V$，使得

$1\to 1$, $f_5\to f_5$, $x_1\to x_2$, $x_2\to x_1$, $x_3\to x_4$, $x_4\to x_3$, $f_1\to f_2$, $f_2\to f_1$, $f_3\to f_4$, $f_4\to f_3$, $h_1\to h_1$, $h_2\to h_1+h_2$, $e_1\to e_2$, $e_2\to e_1$，则 φ_2 是 V 的自同构，且 $\varphi_2^2=\mathrm{id}_V$。

证明 映射 $(x_1,x_2,x_3,x_4)\to(x_2,x_1,x_4,x_3)$ 诱导出了 $K(5)$ 的自同构。这一自同构限制在 V 上就成为 V 的自同构 φ_2。

2 G_2 的导子代数

我们知道，$\mathbf{Z}-$ 阶化李代数的导子代数是 $\mathbf{Z}-$ 阶化的。设 $L=\mathrm{Der}_F V$，则 $L=\oplus_{i\in\mathbf{Z}}L_i$，其中 $L_i=\{D\in L|DV_j\subset V_{i+j},\ \forall j\in\mathbf{Z}\}$。

引理 2.1 $L_{-i}\cong L_i$，$\forall i\in\mathbf{N}$。

证明 由定理 1.2 知 φ_1 是 V 的自同构。与 [2] 中第三章定理 2.10 类似地，由 φ_1 可诱导出 L 的自同构 Φ: $D\to\varphi_1 D\varphi_1^{-1}$，使 $L_{-i}=\Phi(L_i)$，于是 $L_{-i}\cong L_i$。

引理 2.2 $L=\oplus_{i=-2}^{2}L_i$。

证明 由以上引理，只需证明：$L_i=0$，$\forall i\geqslant 3$。

显然，由于 $V=\oplus_{i=-2}^{2}V_i$，故 $L_i=0$，$\forall i>4$。任给 $D\in L_4$，则由 $V_{-2}=[V_{-1},V_{-1}]$ 得 $DV_{-2}=0$，从而 $D=0$，故 $L_4=0$。任给 $D\in L_3$，则 $DV_{-1}\subset V_2$。设 $Dx_i=k_if_5$，$k_i\in F$，$i=1,\cdots,4$。则由 $1=[x_1,x_3]=[x_2,x_4]$，得 $D(1)=D[x_1,x_3]=D[x_2,x_4]$，从而 $k_1f_3+k_3f_1=k_2f_4+k_4f_2$，于是 $k_i=0$，$i=1,\cdots,4$。故 $DV_{-1}=0$，得 $DV_{-2}=0$，即 $D=0$，所以 $L_3=0$。

引理 2.3 $L_2=\mathrm{ad}V_2\oplus\langle\mathrm{ad}_V(x_1x_4x_5),\ \mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)\rangle$。

证明 首先，容易验证：$\mathrm{ad}(x_1x_4x_5)(V)\subset V$，$\mathrm{ad}(x_2x_3x_5)(V)\subset V$。所以 $\mathrm{ad}_V(x_1x_4x_5)$，$\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)$ 是 V 的导子，故属于 L_2。又 $\mathrm{ad}_V(x_1x_4x_5)(1)=e_1$，$\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)(1)=e_2$，$\mathrm{ad}f_5(1)=h_1$，所以 $\mathrm{ad}_V(x_1x_4x_5)$，$\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)$，$\mathrm{ad}f_5$ 线性无关，并且我们只要证：若 $D\in L_2$，$D(1)=kh_2$，则 $D=0$。

显然 $D(h_2)\in\langle f_5\rangle$。得 $1=[1,h_2]$，$[1,f_5]=h_1$ 得 $kh_2=D(1)=[D(1),h_2]+[1,D(h_2)]\in\langle h_1\rangle$。由此，$k=0$，故 $D(1)=0$。由

$$x_i=[1,f_i],\ i=1,\cdots,4,\tag{2.1}$$

得 $D(x_i)=0$，$i=1,\cdots,4$，即 $DV_{-1}=0$。而 $V_0=[V_{-1},V_1]$，故 $DV_0=0$，从而 $D=0$。

注记 2.1 由定理 1.3，经验证易知 $\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)=\varphi_2\mathrm{ad}_V(x_1x_4x_5)\varphi_2^{-1}$。

引理 2.4 $L_1 = \mathrm{ad}V_1$。

证明 给定 $D \in L_1$。则 $D(1) \in V_{-1}$。设 $D(1) = \sum_{i=1}^{4} k_i x_i$，则

$$\left(D - \mathrm{ad}\sum_{i=1}^{4} k_i f_i\right)(1) = 0,$$

故不妨设 $D(1) = 0$。由于 $DV_1 \subset V_2$。设 $D(f_i) = l_i f_5$，$i = 1, \cdots, 4$。则由 (2.1) 得 $D(x_i) = l_i h_1$，$i = 1, \cdots, 4$。而从

$$f_i = [x_i, f_5], \quad i = 1, \cdots, 4. \tag{2.2}$$

得 $D(f_i) = 0$。所以 $l_i = 0$，$i = 1, \cdots, 4$。则 $DV_{\pm 1} = 0$，故 $DV_0 = 0$，从而 $D = 0$。

引理 2.5 $L_0 = \mathrm{ad}V_0 \oplus \langle \mathrm{ad}_V(x_1x_2), \mathrm{ad}_V(x_3x_4), \mathrm{ad}_V(x_2x_4) \rangle$。

证明 首先，容易验证，$\mathrm{ad}_V(x_1x_2)$，$\mathrm{ad}_V(x_3x_4)$，$\mathrm{ad}_V(x_2x_4)$ 使 V 稳定，故它们确是 V 上的导子，并且它们在 $V_{\pm 2}$ 上的作用均为 0。

给定 $D \in L_0$。设 $D(1) = k \cdot 1$。则以 $D - \mathrm{ad}kh_2$ 代替 D，可设 $D(1) = 0$。设 $D(x_1) = \sum_{i=1}^{4} k_i x_i$。令 $D' = D - \mathrm{ad}(k_2 e_2 + k_1 h_1) - k_4 \mathrm{ad}_V(x_3 x_4)$，则 $D'(x_1) = k_3 x_3$，且 $D'(1) = 0$。再以 D' 代替 D。由 $[1, e_1] = [1, e_2] = [1, h_1] = 0$，$[1, h_2] = 1$，可知 $[1, DV_0] = 0$，故 $DV_0 \subset \langle e_1, e_2, h_1 \rangle$。

设 $D(e_i) = k_{i1} e_1 + k_{i2} e_2 + k_{i3} h_1$，$D(h_i) = k_{i+2,1} e_1 + k_{i+2,2} e_2 + k_{i+2,3} h_1$，$i = 1, 2$。由 $0 = [x_1, e_1]$ 得 $0 = D[x_1, e_1] = k_{13} x_1 + k_{12} x_2 + k_3 x_4$，所以，$k_3 = k_{12} = k_{13} = 0$，从而 $D(x_1) = 0$。

由 $[1, f_5] = h_1$，得 $D(h_1) = k_{33} h_1$，又由 $x_1 = [x_1, h_1]$ 得 $k_{33} x_1 = 0$，故 $D(h_1) = 0$。从而

$$D(f_5) = 0. \tag{2.3}$$

由 $h_1 = [e_1, e_2]$ 得 $k_{11} = k_{22}$。由 $e_1 = [e_1, h_2]$ 得 $k_{42} = k_{13}$。由 $e_2 = [e_2, h_2]$ 得 $k_{41} = k_{23}$。由 $x_2 = [x_1, e_2]$ 得 $D(x_2) = k_{23} x_1 + k_{11} x_2$。由 $x_1 = [x_1, h_2]$ 得 $k_{42} = k_{43} = 0$。由 $[x_2, e_2] = 0$ 得 $k_{21} = 0$。即

$$D(e_1) = k_{11} e_1, \quad D(e_2) = k_{11} e_2 + k_{23} h_1, \quad D(h_1) = 0, \quad D(h_2) = k_{23} e_1. \tag{2.4}$$

设 $D(x_3) = \sum_{i=1}^{4} l_i x_i$。则由 $[x_3, h_2] = 0$ 得 $l_1 = 0$，$l_4 = k_{23}$。又由 $[x_1, x_3] = 1$ 得 $l_3 = 0$。由 $x_4 = [x_3, e_1]$ 得 $D(x_4) = l_2 x_1 + k_{11} x_4$。从而

$$\begin{cases} D(x_1) = 0, \quad D(x_2) = k_{23} x_1 + k_{11} x_2, \\ D(x_3) = l_2 x_2 + k_{23} x_4, \quad D(x_4) = l_2 x_1 + k_{11} x_4. \end{cases} \tag{2.5}$$

于是，由 (2.2) 及 (2.3)，得

$$\begin{cases} D(f_1) = 0, \quad D(f_2) = k_{23} f_1 + k_{11} f_2, \\ D(f_3) = l_2 f_2 + k_{23} f_4, \quad D(f_4) = l_2 f_1 + k_{11} f_4. \end{cases} \tag{2.6}$$

由 (2.3)－(2.6) 以及 $D(1) = 0$ 知 $D = \mathrm{ad}k_{23} e_1 + l_2 \mathrm{ad}_V(x_1 x_2) + k_{11} \mathrm{ad}_V(x_2 x_4)$。

定理 2.1 $\mathrm{Der}_F V = \mathrm{ad}V \oplus \langle \mathrm{ad}_V(x_1 x_4 x_5), \mathrm{ad}_V(x_2 x_3 x_5), \mathrm{ad}_V(x_1 x_2), \mathrm{ad}_V(x_3 x_4), \mathrm{ad}_V(x_2 x_4), \rho_1, \rho_2 \rangle$，其中 $\rho_1 = \varphi_1 \mathrm{ad}_V(x_1 x_4 x_5) \varphi_1^{-1}$，$\rho_2 = \varphi_1 \mathrm{ad}_V(x_2 x_3 x_5) \varphi_1^{-1}$。

证明 由引理 2.1 知 $L_{-1}=\Phi L_1$。又由引理 2.4，$L_1=\mathrm{ad}V_1$。故 $L_{-1}=\Phi\mathrm{ad}V_1=\mathrm{ad}\varphi_1V_1=\mathrm{ad}V_{-1}$。$L_{-2}=\Phi L_2$，引理 2.3，得 $L_{-2}=\Phi\mathrm{ad}V_2\oplus\langle\Phi\mathrm{ad}_V(x_1x_4x_5)，\Phi\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)\rangle=\mathrm{ad}V_{-2}\oplus\langle\rho_1，\rho_2\rangle$。再由引理 2.2，即得定理。

下面，我们来讨论 G_2 的外导子组成的代数。记 $\mathscr{L}=\mathrm{Der}V/\mathrm{ad}V$，则我们有

定理 2.2 (1) G_2 的外导子代数 $\mathscr{L}$ 是一个 7 维李代数；

(2) $\mathscr{L}^{(2)}=0$。故 $\mathscr{L}$ 是一个可解李代数。

证明 (1) 设 $\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\xi_1',\xi_2'$ 分别为 $\mathrm{ad}_V(x_1x_4x_5)$、$\mathrm{ad}_V(x_2x_3x_5)$、$\mathrm{ad}_V(x_1x_2)$、$\mathrm{ad}_V(x_3x_4)$，$\mathrm{ad}_V(x_2x_4)$，ρ_1、ρ_2 在 $\mathscr{L}$ 中象。显然，由定理 2.1 知，$\mathscr{L}=\langle\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2,\eta_3,\xi_1',\xi_2'\rangle$。容易验证，这 7 个元素是线性无关的，于是它们构成 $\mathscr{L}$ 的基。故 $\dim\mathscr{L}=7$。

(2) 经计算得，$[\xi_i,\eta_3]=\xi_i$、$[\eta_i,\eta_3]=\eta_i$、$[\xi_i',\eta_3]=\xi_i'$、$i=1,2$，而上述基中其余元素之间的李运算均为零。所以 $L^{(1)}=\langle\xi_1,\xi_2,\eta_1,\eta_2,\xi_1',\xi_2'\rangle$，故 $\mathscr{L}^{(2)}=0$，从而 $\mathscr{L}$ 是可解李代数。

参 考 文 献

[1] Shen Guangyu. Variations of the classical Lie algebra G_2 in low characteristics. Nova J of Algebra and Geometry, 1993, 2(3): 217–243

[2] 林磊. 特性2李代数. 华东师范大学博士学位论文, 1990年

[3] Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory. New York: Springer-Verlag, 1972

The Derivation Algebra of the Lie Algebra G_2 Over a Field of Characteristic 2

Lin Lei

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062)

Abstract In this paper, by using the result that the classical Lie algebra G_2 over a field of characteristic 2 can be imbedded in K(5), the derivation algebra and the algebra of outer derivations of G_2 are determined.

Key words derivation algebra characteristic 2 Lie algebra G_2