第 12 卷第 1 期
1996:118—121
纯粹数学与应用数学
PURE AND APPLIED MATHEMATICS
Vol. 12 No. 1
1996:118—121

㉘ 118-121

特征 2 的非交错的无限维哈米尔顿代数*

O152.5

张永正
(东北师大,长春,130024)

林 磊
(华东师大,上海,200062)

A **摘 要** 证明了特征 2 的非交错的无限维哈米尔顿代数 $\overline{P}(n)$ 与 $P(n)$ 的自然滤过是不变的.进而证明了它们的任一自同构均是由相应的除幂代数的自同构所诱导的.

关键词 特征 $p=2$ 滤过 自同构
分类号 O152.5

哈密顿代数,
李代数,
除幂代数

1. 滤 过

本文总设 F 是特征 $P=2$ 的域.$n\geqslant 3$ 是正整数.$\overline{\mathscr{U}}(n)$ 与 $\mathscr{U}(n)$ 为 F 上的无限维除幂代数.$\overline{W}(n)$ 与 $W(n)$ 为 F 上无限维 W- 型李代数.令

$$\overline{P}(n)=\{\sum_{i=1}^{n}f_iD_i\in\overline{W}(n)\,|\,D_jf_i=D_if_j;i,j=1,\cdots,n\}$$

设 $P(n)=\overline{P}(n)\cap W(n)$.称 $\overline{P}(n)$ 与 $P(n)$ 为非交错的无限维哈米尔顿代数(详见文[1]).本文总用 X 表示 $\overline{P}(n)$ 或 $P(n)$,则 $X=\sum_{i\geqslant -1}X_{[i]}$ 是阶化李代数.令 $X_i=\sum_{j\geqslant i}X_{[j]}$,则 $\{X_i\}_{i\geqslant -1}$ 给出了 X 的一个自然的滤过结构.设 $x\in X$,若 adx 是幂零变换,则称 x 是 ad- 幂零的.

设 $gl(n)$ 为 F 上所有 n 阶方阵构成的李代数.令 $\Gamma:W(n)_{[0]}\to gl(n)$ 是文[2]中定义的李代数 $W(n)_{[0]}$ 的矩阵表示.令

$$AN_0=\{D\in W(n)_{[0]}\,|\,\Gamma(D)\text{ 是幂零阵}\}$$

设 $AN=AN_0+W(n)_1$.则以下命题在 F 的特征为 2 时仍成立:

命题 1 (文[4]的定理 2.2) 设 $D\in W(n)_{[0]}$,则 D 是 ad- 幂零的当且仅当 $\Gamma(D)$ 是幂零阵.

命题 2 (文[2]的定理 4.1) 设 L 是 $\overline{W}(n)$ 的任一子代数,则 AN 的每个元素 D 均是 ad_L- 幂零的.

令 $\overline{\Gamma}=\Gamma|_{X_{[0]}}$.则 $\overline{\Gamma}$ 是 $X_{[0]}$ 的忠实表示,并且 $\overline{\Gamma}(X_{[0]})=\{A\in gl(n)\,|\,A^t=A\}=SO_n$.

引理 1 设 $D\in X_{[0]}$,则 $D\in nil(X)\Leftrightarrow\overline{\Gamma}(D)$ 是幂零阵.这里 $nil(X)$ 表示 X 中所有 ad- 幂零元的集合.

引理 2 (i) 设 $D=D'+D''$,其中 $D'\in X_{[i]}$,$D''\in X_{i+1}$.若 $D\in nil(X)$,则 $D'\in$

* 本文收到日期:1994-04-19

$nil(X)$.

(ii)　设 $D \in X$，若 $D \in nil(X)$，则 $D \in X_0$.

(iii)　设 $D \in X \backslash X_0$，则存在 $H \in nil(X)$，使得 $[D,H] \notin nil(X)$.

我们用 e_{ij} 表示 (i,j) 位置是 1，其余位置是零的 n 阶阵. 设 $A_{ij} = e_{ii} + e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$，则 $A_{ij}^* = A_{ij}$. 令 $\Omega = \{A_{ij} \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. 设 $B_i = e_{i\,i+1} + e_{i+1\,i} + e_{i\,i+2} + e_{i+2\,i}$，$i = 1,\cdots,n-2$. $B_n = e_{n-1\,n} + e_{n\,n-1} + e_{n-1\,1} + e_{1\,n-1}$. 令 $U = \{B_i \mid i = 1,\cdots,n-1\}$. 若 S 是 $gl(n)$ 的子集，令 $\langle S \rangle$ 表示 S 张成的子空间.

引理 3　(i)　Ω 与 U 均为 $S0_n$ 的线性无关的子集. (ii)　Ω 与 U 的元素均为幂零阵. (iii)　$\langle \Omega \rangle \cap \langle U \rangle = \{0\}$.

设 $\mathscr{L} = \langle \Omega \rangle \oplus \langle U \rangle$. 由引理 3 知，$\dim \mathscr{L} = \frac{1}{2}n(n+1) - 1$.

引理 4　设 H 是由 $S0_n$ 中所有幂零阵生成的子代数，则 $N_{S0_n}(H) = S0_n$.

证明　设 M 是 $S0_n$ 中所有迹为零的矩阵构成的子代数，G 是由 $\mathscr{L}$ 生成的 $S0_n$ 的子代数，由引理 3 的(ii)知，$G \subset H \subset M$. 因 M 是 $S0_n$ 的真子代数，故 G 也是 $S0_n$ 的真子代数. 因为 $\dim \mathscr{L} \leqslant \dim G < \dim S0_n$，所以 $\frac{1}{2}n(n+1) - 1 \leqslant \dim G < \frac{1}{2}n(n+1)$. 所以 $\dim G = \frac{1}{2}n(n+1) - 1$，进而可知 $\dim M = \frac{1}{2}n(n+1) - 1$. 故 $G = H = M$. 因为 $N_{S0_n}(M) = S0_n$，故 $N_{S0_n}(H) = S0_n$. □

定理 1　X_0 是 X 的不变子代数

证明　设 T_0 是由 $nil(X) \cap X_{[0]}$ 生成的 X 的子代数. 由引理 1 知，$\overline{\Gamma}(T_0)$ 是 $S0_n$ 中所有幂零阵生成的子代数. 因 $\overline{\Gamma}(X_{[0]}) = S0_n$，由引理 4 知，$[\overline{\Gamma}(X_0), \overline{\Gamma}(T_0)] \subset \overline{\Gamma}(T_0)$. 因 $\overline{\Gamma}$ 是忠实的，故 $[X_{[0]}, T_0] \subset T_0$. 令 $Nil(X)$ 表示由 $nil(X)$ 生成的 X 的子代数，则 $T_0 \subset Nil(X)$. 由命题 2 知，$T_0 + X_1 \subset nil(X)$. 若 $D = D' + D'' \in nil(X)$，其中 $D' \in X_{[0]}$，$D'' \in X_1$. 由引理 2 的(i)知，$D' \in nil(X)$. 故 $D' \in T_0$. 从而 $D \in T_0 + X_1$. 于是 $nil(X) \subset T_0 + X_1$. 易知 $T_0 + X_1$ 是 X 的子代数，故 $Nil(X) \subset T_0 + X_1$. 于是 $Nil(X) = T_0 + X_1$. 从而

$$[X_0, Nil(X)] = [X_0, T_0 + X_1] \subset T_0 + X_1 = Nil(X).$$

故 $N_X(Nil(X)) \supset X_{[0]} + Nil(X) = X_0$. 由引理 2 知，$N_X(Nil(X)) \subset X_0$. 故 $N_X(Nil(X)) = X_0$. 从而 X_0 是 X 的不变子代数. □

定理 2　X 的自然滤过 $\{X_i\}_{i \geqslant -1}$ 是不变的.

2. 自同构群

令 $\mathscr{U}(X)$ 表示 $\overline{\mathscr{U}}(n)$ 或者 $\mathscr{U}(n)$. 我们用 $AutX$ 与 $Aut\mathscr{U}(X)$ 分别表示 X 与 $\mathscr{U}(X)$ 的自同构群，并且当 $X = \overline{P}(n)$ 时，X 与 $\mathscr{U}(X)$ 的自同构指的是连续自同构.

设 $\tau \in Aut\mathscr{U}(X)$，则映射 $\tilde{\tau}: D \to \tau D \tau^{-1}$ 是 $der\mathscr{U}(X)$ 的一个自同构. 若 R 是 $der\mathscr{U}(X)$ 的子代数，令 $Aut(\mathscr{U}(X),R) = \{\tau \in Aut\mathscr{U}(X) \mid \tilde{\tau}(R) \subset R\}$. 则 $Aut(\mathscr{U}(X),R)$ 是半群. 利用定理 1，我们可证得下面的引理 5.

引理5 设$\varphi\in AutX$，$E_i=\varphi(D_i)$，$i=1,\cdots,n$. 设$E_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}D_j$. 则$\det(c_{ij})$是$\mathscr{U}(X)$中的单位，从而$X$的元素均可唯一地表为$\sum_{i=1}^{n}f_iE_i$的形式，其中$f_i\in\mathscr{U}(X)$.

定理3 设$X=\overline{P}(n)$或$P(n)$. 则$Aut(\mathscr{U}(X),X)$与$AutX$在映射$\tau\mapsto\tilde{\tau}$之下同构. 其中$\tilde{\tau}(D)=\tau D\tau^{-1}$，$\forall\ D\in X$.

证明 先证此映射是满的. 任取$\varphi\in AutX$，设$\varphi(D_i)=E_i$，$i=1,\cdots,n$. 令$H_i=D_p(x^{\varepsilon_i+\varepsilon_{i+1}})$，$i=1,\cdots,n-1$，$H_n=D_p(x^{\varepsilon_n+\varepsilon_1})$. 设$\tilde{i}=i+1$，$i=1,\cdots,n$，$\tilde{n}=1$. 则$H_i=x_{\tilde{i}}D_i+x_iD_{\tilde{i}}$，$i=1,\cdots,n$. 由引理5，可设

$$\varphi(H_j)=\sum_{S=1}^{n}f_{js}E_s,\qquad j=1,\cdots,n,$$

其中$f_{js}\in\mathscr{U}(X)$. 由定理1与文[3]的引理8、9，则知$f_{js}\in\mathscr{U}(X_1)$，其中$1\leqslant j,s\leqslant n$. 我们有

$$\varphi[D_i,H_j]=\Big[E_i,\sum_{S=1}^{n}f_{js}E_s\Big]=\sum_{S=1}^{n}E_i(f_{js})E_s,1\leqslant i,j\leqslant n.$$

另一方面，$\varphi[D_i,H_j]=\varphi[D_i,x_jD_{\tilde{j}}+x_{\tilde{j}}D_j]=\varphi(\delta_{ij}D_{\tilde{j}})+\varphi(\delta_{i\tilde{j}}D_j)=\delta_{ij}E_{\tilde{j}}+\delta_{i\tilde{j}}E_j$，$1\leqslant i,j\leqslant n$. 所以$\sum_{S=1}^{n}E_i(f_{js})E_s=\delta_{ij}E_{\tilde{j}}+\delta_{i\tilde{j}}E_j$. 从而$E_i(f_{j\tilde{j}})=\delta_{ij}$，$1\leqslant i,j\leqslant n$.

设$y_j=f_{j\tilde{j}}$，$j=1,\cdots,n$. 则$y_j\in\mathscr{U}(X_1)$，并且$E_i(y_j)=\delta_{ij}$. 设$E_i=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}D_j$，其中$c_{ij}\in\mathscr{U}(X)$. 则有矩阵等式：

$$E_i(y_j)=(c_{ij})(D_i(y_j)).$$

由引理5知，$\det(c_{ij})$是$\mathscr{U}(X)$的单位，故$\det(D_i(y_j))$也是$\mathscr{U}(X)$的单位. 由文[3]的引理8与9知，存在$\tau\in Aut(\overline{\mathscr{U}}(n),\overline{W}(n))$，使得$\tilde{\tau}(x_i)=y_i$，$i=1,\cdots,n$. 则$\tilde{\tau}\in Aut\overline{W}(n)$，并且

$$(\tilde{\tau}(D_i))(y_j)=(\tau D_i\tau^{-1})(y_j)=\tau(D_ix_j)=\delta_{ij},\quad 1\leqslant i,j\leqslant n.$$

因为$(\varphi(D_i))(y_j)=E_i(y_j)=\delta_{ij}$，所以$(\tilde{\tau}(D_i))(y_j)=(\varphi(D_i))(y_j)$. 由文[3]的引理8与9，$\{y_1,\cdots,y_n\}$是标准生成系. 因此$\tilde{\tau}(D_i)=\varphi(D_i)$，$i=1,\cdots,n$. 由文[2]的引理5.2知，$\tilde{\tau}=\varphi$. 从而定理中的映射是满的，进而可以证明，定理中的映射是单的. 故定理得证. □

参 考 文 献

1 Lin Lei. Non-alternating hamiltonain algebra $p(n,m)$ of characteristic two, Communication in algebra. 21(2),(1993),399－411

2 Jin Ning, Locally nilpotent and quasi-nilpotent elements of infinite Lie algebras of Cartan type, Doctoral thesis of East China Nermal University,1990

3 Wilson,R.L., Classification of generalized witt algebras over algebraically closed fields. Trans. Amer. Math. Soc,75(1971),191－120

4 金宁，无限维Cartan型李代数的ad-幂零元、拟幂零元与不变滤过，中国科学，A辑，7(1992),697－704

5 张永正，林磊，特征$p=2$的无限维Cartan型李代数$K(m)$，数学年刊，15(3)(1994),345－351

THE INFINITE NON-ALTERNATING HAMILTONIAN ALGEBRAS OF CHARACTERISTIC TWO

Zhang Yongzheng
(Department of Mathematics Northeast Normal University Changchun 130024)

Lin Lei
(Department of Mathematics East China Normal University Shanghai 200062)

Abstract

In this paper the invariance of natural filtrations of the infinite Non-alternating Hamiltonian algebras $\overline{P}(n)$ and $P(n)$ of characteristic two is proved. The automorphism groups of $\overline{P}(n)$ and $P(n)$ are discussed.

Key words characteristic two; filtration; automonphism
1991 MSC 17B50