第21卷第1期 数学进展 Vol.24, No.1
1995年2月 ADVANCES IN MATHEMATICS Feb., 1995

② 28-38

素特征李代数概述*

林 磊

（华东师范大学数学系，上海，200062）

O152.5

摘要 近20年来，国内外在素特征李代数的研究中取得了许多突破性的进展。本文是对近年来国内外在这一领域的研究成果的一个综述。第一部分是对Cartan型李代数的定义以及主要结构的回顾。然后，重点介绍了两个重要的分类定理，即：素特征域上的有限维局限单李代数的分类定理以及素特征域上的有限维单李代数的分类定理。由于后一分类是在前一分类的基础上完成的，所以，本文对第一个分类定理的证明作了一个简单的介绍。在第三部分中，对素特征李代数的表示理论方面取得的成果，主要是阶化李代数的阶化表示作了介绍。最后，由于分类定理没有涉及小特征情形，所以本文对国内外在构造小特征的单李代数方面所作的努力作了介绍。

关键词 素特征李代数；Cartan型；表示理论；小特征

表示论 李代数

李代数有3个较大的研究方向：特征零有限维李代数，素特征李代数以及Kac-Moody及其它无限维李代数。素特征李代数即特征 $p>0$ 的域 F 上的李代数，故也称特征 p 李代数，或模李代数。它的研究始于本世纪30年代。特别是对特征 p 的单李代数的研究最初是由Jacobson, Zassenhaus, Witt以及张禾瑞开始的。到目前为止，素特征李代数理论的发展已有了50多年的历史。值得一提的是，近20年来，素特征李代数的研究取得了许多突破性的进展。本文将对近年来在这一领域所取得的成果作一个简单的介绍。

1 Cartan型李代数

我们知道，从复数域上的有限维单李代数出发，通过改变基域，可以得到一系列的素特征李代数，这些李代数称为典型李代数。这些李代数，或商去它们的中心后大多是单李代数。但是，除了这些典型李代数外，是否还有其他的单李代数呢？1937年，E.Witt首先发现了一个非典型的单李代数 W_1，这是特征 $p>2$ 的域上的一个 p 维的单李代数。W_1 有一个基 $\{e_{-1}, e_0, \cdots, e_{p-2}\}$，且具有李运算

$$[e_i, e_j]=\begin{cases}(j-i)e_{i+j}, & \text{若 } -2\le i+j\le p-1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

同年，N.Jacobson引入了局限李代数的概念（参见[21]）。一个特征 p 的域 F 上的李代数 L 称为局限李代数，如果 L 带有一个映射 $[p]$：$L\to L$，$a\mapsto a^{[p]}$，使得

收稿日期：1993-05-27。
* 本文得到国家自然科学基金资助，并曾在1993年黄山全国青年代数会议上作过大会报告。

(1) $ad\, a^{[p]} = (ad\, a)^p$, $\forall a \in L$;

(2) $(ka)^{[p]} = k^p a^{[p]}$, $\forall k \in F$, $a \in L$;

(3) $(a+b)^{[p]} = a^{[p]} + b^{[p]} + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(a,b)$,

其中 $(ad(a\lambda + b))^{p-1}(a) = \sum_{i=1}^{p-1} i s_i(a,b)\lambda^{i-1}$, $\forall a,b \in L$.

在以下的讨论中，我们假设 $p>2$.

设 $A(m) = \{\alpha = (\alpha(1),\cdots,\alpha(m)) \mid 0 \leq \alpha(i) \in \mathbb{Z}\}$, $\varepsilon_i = (\delta_{i1},\cdots,\delta_{im})$. 对 $\alpha,\beta \in A(m)$, 记 $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha(1)}{\beta(1)}\cdots\binom{\alpha(m)}{\beta(m)}$. 给定 $\boldsymbol{n} = (n_1,\cdots,n_m)$, $n_i \in \mathbb{N}$, 设 $A(m,\boldsymbol{n}) = \{\alpha \in A(m) \mid \alpha(i) < p^{n_i}\}$. 定义 $\mathfrak{A}(m)$ 是一个无限维的交换的结合代数. 它的每个元素都是形式和$\sum a_\alpha x^\alpha$, 其中 α 跑遍 $A(m)$, $a_\alpha \in F$ (允许无限和), 乘法定义为

$$x^\alpha x^\beta = \binom{\alpha+\beta}{\alpha} x^{\alpha+\beta}.$$

给定 $\boldsymbol{n} = (n_1,\cdots,n_m)$, $n_i \in \mathbb{N}$. 记 $\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n})$ 是由所有 x^α, $\alpha \in A(m,\boldsymbol{n})$ 张成的子空间, 则 $\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n})$ 是 $\mathfrak{A}(m)$ 的子代数. 记 $\mathbf{1} = (1,\cdots,1)$, 那么 $\mathfrak{A}(m,\mathbf{1}) \cong F[X_1,\cdots,X_m]/(X_1^p,\cdots,X_m^p) = B_m$.

对每个m元正整数组$\boldsymbol{n}$. 在$\mathfrak{A}(m)$上可定义一个滤过: 取$\mathfrak{A}(m)_j$为所有 $a_\alpha x^\alpha$的和(可以无限), 其中$\alpha \in A(m)$, $n_1\alpha(1) + \cdots + n_m\alpha(m) \geq j$. 此外, $\mathfrak{A}(m)$有一拓扑阶化(即允许无限和): $\mathfrak{A}(m) = \sum \mathfrak{A}(m)_{[j]}$, 其中$\mathfrak{A}(m)_{[j]}$是所有$x^\alpha$的张成, $\alpha \in A(m)$, $n_1\alpha(1) + \cdots + n_m\alpha(m) = j$. 这样一个滤过使$\mathfrak{A}(m)$具有拓扑代数的结构.

对每个 i, 存在$\mathfrak{A}(m)$的连续导子D_i, 使得

$$D_i(x^\alpha) = \begin{cases} x^{\alpha-\varepsilon_i}, & \text{若}\alpha \in A(m),\ \alpha(i) > 0, \\ 0, & \text{若}\alpha \in A(m),\ \alpha(i) = 0. \end{cases}$$

我们常把x^{ε_i}记作x_i. 集合$\{u_1D_1 + \cdots + u_mD_m \mid u_i \in \mathfrak{A}(m)$(或 $u_i \in \mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n})$)$\}$是 $\mathrm{Der}\mathfrak{A}(m)$的子代数, 记作$W(m)$(或$W(m,\boldsymbol{n})$).

如果我们令

$$W(m)_j = \sum_{k=1}^m \mathfrak{A}(m)_{j-n_k} D_k,$$

则$W(m)$构成一滤过代数, 且它有一拓扑阶化$W(m) = \sum W(m)_{[j]}$, 其中

$$W(m)_{[j]} = \sum_{k=1}^m \mathfrak{A}(m)_{[j-n_k]} D_k.$$

对任何子代数$M \subseteq W(m)$, 如果定义$M_j = W(m)_j \cap M$, 则M便成为$W(m)$的滤过子代数.

设$\Omega(m)$是除幂代数$\mathfrak{A}(m)$上的微分形式组成的代数, 我们定义ω_S, ω_H, $\omega_K \in \Omega(m)$如下:

$$\omega_S = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m,$$

$$\omega_H = \sum_{i=1}^r dx_i \wedge dx_{i+r}, \quad m = 2r,$$

$$\omega_K = dx_{2r+1} + \sum_{i=1}^r (x_{i+r}dx_i - x_i dx_{i+r}), \quad m = 2r+1.$$

定义$W(m)$的子代数$S(m)$、$H(m)$、$K(m)$如下：

$$S(m)=\{D\in W(m)\mid D(\omega_S)=0\}\quad (m\geqslant 3),$$
$$H(m)=\{D\in W(m)\mid D(\omega_H)=0\}\quad (m=2r\geqslant 2),$$
$$K(m)=\{D\in W(m)\mid D(\omega_K)\in \mathfrak{A}(m)\omega_K\}\quad (m=2r+1\geqslant 3).$$

对$W(m)$的任一自同构Φ，对$X=W,S,H$或K，定义

$$X(m,\boldsymbol{n},\Phi)=\Phi X(m)\cap W(m,\boldsymbol{n}).$$

对$X=W,S,H$或K，我们把$X(m,\boldsymbol{n},\mathrm{id})$简记为$X(m,\boldsymbol{n})$。注意到$W(m,\boldsymbol{n},\Phi)=W(m,\boldsymbol{n})$，对$W(m)$的任意自同构$\Phi$成立。

在以后的讨论中，我们总假定用以定义滤过和阶化的m元数组是1，但对代数$K(m)$或$K(m,\boldsymbol{n},\Phi)$除外，此时，我们取这一数组为$(1,\cdots,1,2)$，对$X=S$、H或K，令$X(m,\boldsymbol{n})_{[j]}=W(m,\boldsymbol{n})\cap W(m)_{[j]}$，那么易证$X(m,\boldsymbol{n})$是阶化的，注意到滤过代数$X(m,\boldsymbol{n},\Phi)$是滤过代数$W(m,\boldsymbol{n})$的滤过子代数，所以我们可以把对应的阶化代数$\mathrm{gr}(X(m,\boldsymbol{n},\Phi))$看成阶化代数$\mathrm{gr}(W(m,\boldsymbol{n}))=W(m,\boldsymbol{n})$的阶化子代数。一般地，我们把$X(m,\boldsymbol{n},\Phi)^{(2)}$称为Cartan型李代数（在某些文章中，也称为广义Cartan型李代数。

下面我们来简单地讨论一下$X(m,\boldsymbol{n})$的结构，首先，对于取定的$A(m,\boldsymbol{n})$，规定$\gamma:=(p^{n_1}-1,\cdots,p^{n_m}-1)\in A(m,\boldsymbol{n})$。$W(m,\boldsymbol{n})$的结构是清楚的，所以我们先来讨论$S(m,\boldsymbol{n})$。为此，我们引入以下的散度映射

$$\mathrm{div}:\begin{cases}W(m,\boldsymbol{n})\to\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n}),\\ \sum_{j=1}^{m}f_jD_j\to\sum_{j=1}^{m}D_j(f_j).\end{cases}$$

那么，我们有

$$S(m,\boldsymbol{n})=\{E\in W(m,\boldsymbol{n})\mid \mathrm{div}(E)=0\}.$$

为了考察$S(m,\boldsymbol{n})^{(1)}$的结构，我们引入映射

$$D_{ij}:\begin{cases}\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n})\to W(m,\boldsymbol{n}),\\ f\to D_j(f)D_i-D_i(f)D_j,\end{cases}$$

通过计算易知

$$S(m,\boldsymbol{n})^{(1)}=\langle D_{ij}(f)\mid f\in\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n}),\ 1\leqslant i<j\leqslant m\rangle.$$

给定$m\in\mathbb{N}$，设r是不大于$\frac{1}{2}m$的最大整数，对$j\in\{1,\cdots,2r\}$，令

$$\sigma(j):=\begin{cases}1, & 1\leqslant j\leqslant r,\\ -1, & r<j\leqslant 2r.\end{cases}$$

另外，我们定义

$$j':=\begin{cases}j+r, & 1\leqslant j\leqslant r,\\ j-r, & r<j\leqslant 2r.\end{cases}$$

那么，我们有

$$H(2r,\boldsymbol{n})=\left\{\sum_{j=1}^{2r}f_jD_j\ \middle|\ \sigma(j')D_i(f_{j'})=\sigma(i')D_j(f_{i'}),\ 1\leqslant i,j\leqslant 2r\right\}.$$

定义映射

$$D_H:\begin{cases}\mathfrak{A}(2r,\boldsymbol{n})\to W(2r,\boldsymbol{n}),\\ f\mapsto\sum_{j=1}^{2r}\sigma(j)D_j(f)D_{j'}.\end{cases}$$

显然，$\ker D_H=F1$，$D_H(\mathfrak{A}(2r,\boldsymbol{n}))\subseteq H(2r,\boldsymbol{n})$，并且我们有

$$H(2r,\boldsymbol{n})^{(2)}=\langle D_H(x^\alpha)\mid\alpha\in A(2r,\boldsymbol{n}),\ \alpha\neq\gamma\rangle,$$

以及李运算公式

$$[D_H(f),D_H(g)]=D_H(D_H(f)(g)),\quad f,g\in\mathfrak{A}(2r,\boldsymbol{n}).$$

最后，我们来讨论 $K(m,\boldsymbol{n})^{(1)}$。为此，假设 $m=2r+1$。引入映射 D_K：$\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n})\to W(m,\boldsymbol{n})$，$D_K(f)=\sum_{j=1}^{m}f_jD_j$，其中

$$\begin{cases}f_j=x^{\varepsilon_j}D_n(f)+\sigma(j')D_{j'}(f),\ j\leqslant 2r,\\ f_n=2f-\sum_{j=1}^{2r}x^{\varepsilon_j}D_j(f).\end{cases}$$

易知 D_K是一个单一线性映射，并且

$$D_K(\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n}))=K(m,\boldsymbol{n}).$$

通过计算，我们还可发现在 $K(m,\boldsymbol{n})$中有如下李乘法公式

$$[D_K(f),D_K(g)]=D_K(w),\quad f,g\in\mathfrak{A}(m,\boldsymbol{n}),$$

其中

$$w=\left(2-\sum_{j=1}^{2r}x^{\varepsilon_j}D_j\right)(f)D_n(g)-\left(2-\sum_{j=1}^{2r}x^{\varepsilon_j}D_j\right)(g)D_n(f)+\sum_{j=1}^{2r}\sigma(j)D_j(f)D_{j'}(g).$$

关于$K(m,\boldsymbol{n})^{(1)}$的结构，我们有

$$K(m,\boldsymbol{n})^{(1)}=\begin{cases}K(m,\boldsymbol{n}), & m+3\not\equiv 0(\operatorname{mod}p),\\ \sum_{\alpha\neq\tau}FD_K(x^\alpha), & m+3\equiv 0(\operatorname{mod}p).\end{cases}$$

定理1.1[2] 假设基域F的特征$p>2$，那么

（1）$W(m,\boldsymbol{n})$是$mp^{\sum n_i}$维的单李代数，称为广义 Jacobson-Witt 代数或一般 Cartan 型李代数。

（2）设$m\geqslant 3$。则$S(m,\boldsymbol{n})^{(1)}$是$(m-1)(p^{\sum n_i}-1)$维的单李代数，称为特殊Cartan型李代数。

（3）设$m=2r\geqslant 2$。则$H(m,\boldsymbol{n})^{(2)}$是$p^{\sum n_i}-2$维的单李代数，称为 Cartan 型 Hamilton 李代数。

（4）设$m=2r+1\geqslant 3$。则$K(m,\boldsymbol{n})^{(1)}$是单李代数。当$m+3\not\equiv 0(\operatorname{mod}p)$时，$K(m,\boldsymbol{n})^{(1)}=K(m,\boldsymbol{n})$是$p^{\sum n_i}$维的；当$m+3\equiv 0(\operatorname{mod}p)$时，$K(m,\boldsymbol{n})^{(1)}$是$p^{\sum n_i}-1$维的。这一代数称为接触 Cartan 型李代数。

（5）对$X=W,S,H,K$，$X(m,\boldsymbol{n})^{(2)}$是可局限的当且仅当$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{1}$。

2 分类定理

本节中我们总假定基域F的特征$p\geqslant 7$。我们要介绍素特征李代数理论中的两个重要的分类定理。

首先来刻画一下第一个分类定理中所涉及到的那些李代数。对于复数域$\mathbb{C}$上的每一个有

限维单李代数 A，设 A_Z 是 A 的某一组 Chevalley 基的 Z-张成，把它再扩充到基域 F 上：$A_F = A_Z \otimes F$。然后再商去它的中心 $C(A_F)$（当 $A \cong \mathfrak{sl}(n)$，$p|n$ 时，这一中心非零），那么，我们就得到了一个基域 F 上的单的、并且是局限的李代数。它们对应于不可约根系 $A_n(n\geq 1)$，$B_n(n\geq 2)$，$C_n(n\geq 3)$，$D_n(n\geq 4)$，E_6, E_7, E_8, F_4, G_2。50 年代，Mills 和 Seligman 用公理化的方法对典型李代数进行了刻画[1]。

除了典型李代数这一类局限单李代数外，还有另一类李代数，即：Cartan 型李代数。从第 1 节中我们知道 $\mathfrak{U}(m,1) \cong B_m$。我们把 $\mathfrak{U}(m,1)$ 与 B_m 等同，则易证 $W(m,1) = \mathrm{Der}\, B_m$。把 $W(m,1)$ 简记为 W_m。相应地，把 $S(m,1)$，$H(m,1)(m=2r)$，$K(m,1)(m=2r+1)$ 分别简记为 S_m, H_m 以及 K_m。于是从第 1 节中我们知道，W_m，$S_m^{(1)}(n\geq 3)$，$H_m^{(2)}(m=2r\geq 2)$，$K_m^{(1)}(m=2r+1\geq 3)$ 都是局限单李代数。上述所叙述的 W, S, H, K 型局限单李代数，称为 Cartan 型局限单李代数。

1987年，美国数学家 Richard E. Block 和 Robert Lee Wilson 完成了对有限维局限单李代数的分类定理[3]。通过这一分类定理，使我们对局限单李代数的结构有了一个完整的了解。所以这是素特征李代数研究中的一个重大突破。下面我们来给出这一分类定理。

定理2.1（Block-Wilson） 设 F 是特征 $p>7$ 的代数闭域，L 是 F 上的有限维局限单李代数，那么 L 或者是典型单李代数，或者是 Cartan 型局限单李代数。

这一分类定理的解决，实际上得益于许多数学家的共同努力。它最早是由原苏联数学家 A.I.Kostrikin 和 I.R.Shafarevič 在1966年提出的，所以 Block 和 Wilson 实际上是证明了 Kostrikin-Shafarevič 猜想。对这一分类问题作出重要贡献的数学家还有：已故的 B. Ju Weisfeiler, V.G.Kac, S.P.Demuškin, G.Seligman, I.Kaplansky, G.M.Benkart, M.J.Osborn 以及 H. Strade 等教授。

下面，我们把这一分类定理证明的主要思路简单地介绍一下。

假设 L 是任一有限维单李代数，L_0 是其极大子代数，L_{-1} 是包含 L_0 的 ad L_0-不变的子空间，使得 L_{-1}/L_0 是 ad L_0-不可约的。根据 E.Cartan 和 Weisfeiler 的方法，我们可归纳地定义 L 的一系列子空间 L_i 如下：

$$L_{i-1} = [L_i, L_{-1}] + L_i,\quad i\geq 0,$$
$$L_{i+1} = \{x \in L_i \mid [x, L_{-1}] \subseteq L_i\},\quad i\geq 0.$$

这样，我们就得到 L 的一个滤过，称为相伴于极大子代数 L_0 的滤过。设 $G = \sum G_i$，$G_i = L_i / L_{i+1}$，那么 G 是由该滤过所相伴的阶化代数。

分类定理的第一个重要步骤，是从 Kostrikin 和 Shafarevič 在1969年，Kac，Wilson 在70年代以及其他数学家一系列工作的结果所得到的以下所谓的“识别定理”：

定理2.2[23-24]（识别定理） 设 L 是 F 上的有限维单李代数，L_0 是其极大子代数。赋予 L 一个相伴于 L_0 的滤过。设 G 是相伴的阶化代数，假设 G 满足：

（1）G_0 是局限李代数，且 G_0 是一些局限理想的直和，这些理想是典型单的，$\mathfrak{gl}(n)$，$\mathfrak{sl}(n)$，$\mathfrak{pgl}(n)$，若 $p|n$，或者是交换的；

（2）G_0 在 G_{-1} 上的作用是局限的；

（3）如果 $i\geq 0$，$x \in G_i$，且 $[x, G_{-1}] = 0$，则 $x = 0$；

那么，L 或者是典型的，或者是 Cartan 型的。

接下来的工作，是对局限李代数 L，怎样找到合适的极大子代数 L_0，使得 (L, L_0) 满足识

别定理的假设。寻找L_0的方法有两种。第一种方法用在低(环面)秩代数的情况。事实上，我们可对秩1和秩2的满足某些限制条件的半单局限李代数进行完全的分类。其中，关于环面秩为2的分类主要用到了Block在1969年所得的结果，即Block定理[25]，它确定了所有具有极小理想的微分单环。这些低秩李代数的分类有助于对一般秩的情况能够找到合适的L_0。

第二种方法是对一般秩的情形采用局部分析方法。在此，Block和Wilson引入了所谓"截面"的概念。设A是个局限李代数，T是A的一个极大环面，则有A关于T的Cartan分解：$A=C_A(T)+\sum_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$。如果$\alpha\in\Gamma$(或，$\alpha,\beta\in\Gamma,\alpha,\beta$独立)，记$A^{(\alpha)}=\sum_{i\in Z}A_{i\alpha}$(或，$A^{(\alpha,\beta)}=\sum_{i,j\in Z}A_{i\alpha+j\beta}$)以及$A[\alpha]=A^{(\alpha)}/\mathrm{solv}\ A^{(\alpha)}$(或，$A[\alpha,\beta]=A^{(\alpha,\beta)}/\mathrm{solv}\ A^{(\alpha,\beta)}$)。代数$A[\alpha]$(或，$A[\alpha,\beta]$)称为$A$(关于$T$的)秩1(或，秩2)的截面。此外还引入了"正常根"这一重要概念。满足识别定理的极大子代数L_0，必须包含一个具有某些很好性质的极大环面，其中一个重要性质即要求正常根尽可能地多。利用Winter共轭，在L是局限单李代数时，可以找到一个具有极大维数的环面T，使得关于T的所有根均是正常的。这些工作只需在秩2截面上进行即可。

最后，在有了这样的T之后，再要找一个子代数Q，取L_0是L的包含Q的极大子代数，可证L_0满足识别定理的要求，从而完成了分类定理的证明。

在局限单李代数分类定理的基础上，之后人们又开始了对一般的有限维单李代数的分类问题的研究。在这方面，早在1970年，Kostrikin就在法国尼斯举行的国际数学家大会上，提出了他对这一问题的猜想，即所谓的"广义Kostrikin-Safarevič猜想"。所以人们研究的目标就是要验证这一猜想是否成立。经过许多数学家的努力，其中包括Block，Wilson，Benkart，Osborn，特别是H.Strade的杰出工作，终于在1989年完成了这一工作。具体地说，就是得到了以下的第二个分类定理。

定理2.3 特征$p>7$的代数闭域上的有限维单李代数或者是典型李代数，或者是Cartan型李代数。

这一定理的证明，分为几个部分，分别发表在不同的杂志上，主要由Strade所完成[16-18]。其证明的要点在于：首先是充分利用了局限李代数分类定理的方法和技巧。其次是引入了p-包络的概念，并发展了p-包络理论。第三，Strade引进了所谓"绝对环面秩"TR(K,L)的概念，其中K是任一李代数L的子代数。最后，对于半单代数L，通过把它嵌入其导子代数，可得到子空间$L^{(\alpha)}:=\sum_{i=0}^{p-1}L_{i\alpha}$，其中$\alpha$是根，通过对根$\alpha$的讨论(实际上是对$L^{(\alpha)}$性质的讨论)，可把根分成四种情况：A，B，C，D。然后，对这四种情况分别进行处理，便最终完成了分类定理的证明。

3 表示理论

素特征域上的李代数的表示理论与特征零的域上的表示理论有很大的不同，对于单李代数的表示尤其如此。对于特征零的代数闭域上的有限维半单纯李代数的有限维表示，有许多很好的结果，其中包括著名的Wely定理，即完全可约性定理。并且，对于这样的代数上的不可约模的结构，也知道得很多，因为它们都是最高权表示。但是对于素特征的情形，甚至半单纯李代数的结构也不是很清楚，不用说它们的表示了。即使是单李代数的情形，也有两类代数，即典型李代数和Cartan型代数。并且，此时完全可约性定理不成立，所以使得表示理

论比特征零时要复杂得多，因为此时除了要考虑不可约模之外，还要考虑不可分解模。对于典型代数，也不象特征零时那样，不可约模都是最高权模。总而言之，素特征域上的表示理论基本上不能用特征零的方法来建立。不过，对于素特征的表示，至少有一点优势是特征零时所没有的，这一点就是下面的

定理3.1[2] (N.Jacobson) 设 F 是一个正特征 p 的域。假定 L 是 F 上的有限维李代数。那么每个不可约 L-模 V 都是有限维的。

由于Cartan型代数的表示具有更多的特殊性，所以本节中我们主要介绍Cartan型代数的表示。

谈到Cartan型代数的表示，人们自然会提到最早从事这方面研究的张禾瑞教授。1941年，他在德国学习期间，在E.Witt和H.Zassenhaus教授的指导下，对于Witt代数，即 W_1 的不可约表示进行了研究，并且确定了Witt代数的所有不可约表示。在以后相当一段时间内，这一结果是非典型单李代数的表示理论方面仅有的成果。目前，在Cartan型李代数的表示理论方面，已经取得了相当一部分成果。其中，沈光宇教授对于阶化Cartan型李代数的阶化表示方面的工作是十分重要的，因此，我们对此作一简单的介绍。

首先，沈光宇提出了"伸张"的概念和模的混合积的概念，并讨论了它们的性质。

设 $\mathfrak{U}$ 是一个交换结合代数。如 $\{D_1,\cdots,D_n\}$ 是 $\mathfrak{U}$ 上一组两两交换的微分，则微分集 $K=\{\sum a_iD_i \mid a_i\in\mathfrak{U}\}$ 是一李代数。令 $M(n)=\mathfrak{gl}(n)$ 是以 $\{e_1,\cdots,e_k\}$ 为基的 n 维线性空间 V_n 上的所有线性变换的李代数，E_{ij} 为满足 $E_{ij}e_k=\delta_{jk}e_i$ 的线性变换。考虑 $\overline{M}(n)=\mathfrak{U}\otimes_F M(n)$，它在换位运算 $[a\otimes A, b\otimes B]=ab\otimes[A,B]$ 下是一李代数，如 L_0 是 $M(n)$ 的一个子代数，则

$$L=\left\{D=\sum_i a_iD_i\in K \,\Big|\, \sum_{i,j}D_i(a_j)\otimes E_{ij}\in\mathfrak{U}\otimes L_0\right\}$$

是 K 的子代数。L 称为 L_0 在 K 中的伸张[13]。

令 L_0 为 $M(n)$ 的子代数，L 为 L_0 在 K 中的伸张，$\overline{L}=L\oplus\mathfrak{U}$。如 ρ_0 是 L_0 在模 V 上的表示，ρ 是 $\overline{L}$ 在模 U 上的容许表示而 $k\in F$，令

$$\sigma_k(D+f)=\overline{\rho}_V(D+kf)+(\rho|_{\mathfrak{U}}\otimes\rho_0)(\tilde{D}),$$

这里 $D\in L$，$f\in\mathfrak{U}$，$\tilde{D}=\sum D_i(a_j)\otimes E_{ij}\in\mathfrak{U}\otimes M(n)$。则 σ_k 是 $\overline{L}$ 在 $U\otimes V$ 上的表示[13]。表示 σ_k（模 $U\otimes V$）称为 ρ 和 ρ_0（U 和 V）具有膨胀系数 k 的混合积，记为 $\rho_{(k)}\rtimes\rho_0$（$U_{(k)}\rtimes V$）。

定理3.2[13] 设 L_0 为 $M(n)$ 的局限子代数，L 为 L_0 在 K 中的伸张而 k 是 F 的素域 $\boldsymbol{Z}_p$ 中的元，如 L 是局限代数，ρ、σ 相应为 $\overline{L}$ 及 L_0 的局限表示而 ρ 是容许的，则 $\rho_{(k)}\rtimes\sigma$ 是 $\overline{L}$ 的局限表示。

其次是引入了阶化李代数的正、负阶化模的概念，对它们作了一般讨论，并把结果应用于阶化Cartan型李代数的阶化模[14]。

阶化李代数 $\mathfrak{L}=\oplus_{i\in Z}\mathfrak{L}_i$ 的模称为正（负）阶化模，如 $V=\oplus_{i\geq 0}V_i$，且 $\mathfrak{L}_jV_i\subseteq V_{i+j}$（$\mathfrak{L}_jV_i\subseteq V_{i-j}$）。如 $V\neq 0$（必要时重排足标），总设 $V_0\neq 0$。V_0 是一 $\mathfrak{L}_0$-模，称为 V 的底（顶）空间。

定理3.3 设 $\mathfrak{L}$ 为阶化李代数。对每一不可约 $\mathfrak{L}_0$-模 V_0，在同构意义下，存在一个且只有一个不可约正（负）阶化 $\mathfrak{L}$ 模以 V_0 为其底（顶）空间。

对于阶化Cartan型李代数的阶化模，主要讨论了可迁 L-模 $\mathfrak{U}_{(k)}\rtimes V_0$ 以及诱导模 $\mathfrak{P}_{(k)}\rtimes V_0$，得到了一些很好的性质。其中 $\mathfrak{U}$，$\mathfrak{P}$ 分别表示除幂代数及多项式代数，L 表示[13,(E1)-(E4)]中的任一李代数。

通过对于混合积和正负阶化模的讨论，在文献[15]中，沈光宇确定了在特征$\neq 2,3$的域上的Cartan型W,S,H型单李代数$L(n)$和$L(m,n)$的所有不可约正负阶化模。此外还确定了$L(m,n)$的所有不可约正负滤过模。对于$L(n)$，每个不可约负滤过模都是负阶化模。然而，存在不是阶化模的不可约正滤过模。

1982年，R.R.Holmes对局限接触Cartan型代数确定了其不可约局限模(由沈光宇的结果，是阶化模)，除了少数例外情形。

1993年，博士研究生胡乃红对一般的有限维接触代数确定了其所有不可约阶化模[22]。

4 小特征李代数

小特征李代数的研究与大特征完全不同。许多的工具和结论在此都不能使用。所以，关于$p\leq 7$的单李代数的分类问题目前还是一个悬而未决的问题。在这些小特征中，最有希望的应该是$p=7$的情形，因为大多数李代数方面的专家认为，分类定理应该对$p=7$的情形也成立，只是还有一些技术上的问题。但是，对于$p=2,3,5$，分类定理一定不成立。当$p=5$时，原苏联数学家G.M.Melikyan举出了一个反例[26]，这一族代数现被称为Melikyan代数。Melikyan代数是已知的特征5的代数闭域上的既不是典型的又不是Cartan型的单李代数的仅有的反例，可是这一代数却满足识别定理。以后，M.I.Kuznetsov对这一代数又作了深入的研究[27]。对于特征3，有许多既不是典型代数又不是Cartan型代数的反例，在这方面，M.Frank、Kostrikin以及Gordon Brown都举出了一些反例。其中以Brown在这方面的工作最多[20]。他还在这方面写过综合性的文章。在小特征李代数中，尤以$p=2$的研究最困难，因为此时连许多典型李代数都退化了。并且，在最初Cartan型代数的研究中，H,K型代数在$p=2$时甚至都没有定义。此外，从下面的定理中，我们不难发现$p=2$时研究的特殊性。

定理4.1 设F是特征$p=2$的域，那么在F上不存在环面秩为1的有限维局限单李代数。

下面，我们来讨论一下特征$p=2$时的Cartan型代数。对于这一课题的研究，应该归功于已故的Weisfeiler教授。正是由于他1983年的北京讲学以及他的建议，才引出了薛小西对于H型代数以及后来本文作者对于K型代数的讨论。在此，我们假设基域F的特征$p=2$。对于W型代数，我们有

定理4.2 (1) 如果m 1，则$W(m,n)$是单代数。

(2) 如果n 2，则$W(1,n)^{(1)}$是单代数。

(3) $W(m,n)^{(1)}$是可局限的当且仅当$n=1$。

对于S型代数，结论与大特征时是一致的。对于H代数，其定义也与大特征时一致，并且有

定理4.3[10] 假设$r\geq 2$或$r=1$但$n\geq 2$，那么

(1) $H(2r,n)^{(2)}$是单李代数。

(2) $H(2r,n)^{(2)}$是可局限的当且仅当$n=1$。

对于K型代数。设$m=2r+1$，$\{\mu_1,\cdots,\mu_{2r}\}$是$F$的子集，且满足条件

$$\mu_i+\mu_{i'}=1,\quad 1\leq i\leq 2r.$$

定义映射

$$D_K:\begin{cases}\mathfrak{A}(m,n)\to W(m,n),\\ f\mapsto\sum_{j=1}^{m}f_jD_j,\end{cases}$$

其中，$f_j = D_{j'}(f) + \mu_j x^{\pi^j} D_n(f)$，$1 \leq j \leq 2r$，$f_\pi = f + \sum_{j=1}^{2r} \mu_j x^{\pi^j} D_j(f)$。则 D_K 是单一线性映射。记 $K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)$ 为 $\mathfrak{U}(m,\boldsymbol{n})$ 在 D_K 下的像，则 $K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)$ 是 $W(m,\boldsymbol{n})$ 的一个子代数[6]。

任给 $f,g \in \mathfrak{U}(m,\boldsymbol{n})$，设 $[D_k(f), D_k(g)] = D_k(w)$，则

$$w = \left(f + \sum_{i=1}^{2r} \mu_i x^{\pi^i} D_i(f)\right)(D_n(g)) + \left(g + \sum_{i=1}^{2r} \mu_i x^{\pi^i} D_i(g)\right)(D_n(f)) + \sum_{i=1}^{2r} (D_i(f))(D_{i'}(g)).$$

由于 D_K 是单射，我们可把 $K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)$ 与 $\mathfrak{U}(m,\boldsymbol{n})$ 等同。从而有

定理4.4[7,8] （1）$K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)^{(1)}$ 是单代数。

（2）如果 $r \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$，则 $K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)^{(1)} = K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)$；

如果 $r \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2)$，则 $K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)^{(1)} = \langle x^\alpha \mid \alpha \in A(m,\boldsymbol{n}),\ \alpha \neq \gamma \rangle$。

（3）$K(m,\boldsymbol{n},\mu_i)^{(1)}$ 是可局限的当且仅当 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}$。

对于局限Cartan型李代数，本文作者还计算了它们的导子代数[7]。对于非局限的情形的 K 型代数的导子代数，我们有

定理4.5[9] （1）设 r 是大于1的奇数，那么

$$\mathrm{Der}\, K(2r+1,\boldsymbol{n},\mu_i) = \mathrm{ad}\, K(2r+1,\boldsymbol{n},\mu_i) \oplus M,$$

其中 $M = \langle D_i^{2^{k_i}} \mid i = 1,\cdots,2r+1, 1 \leq k_i < n_i \rangle$。

（2）设 r 是偶正数，那么

$$\mathrm{Der}\, K(2r+1,\boldsymbol{n},\mu_i)^{(1)} = \mathrm{ad}\, K(2r+1,\boldsymbol{n},\mu_i)^{(1)} \oplus \mathrm{ad}\, x^\gamma \oplus M.$$

本文作者1989年在特征2的域上引入了一类与 H 型代数性质非常相似，但又完全不同于 H 型代数的新代数 $P(m,\boldsymbol{n})$。根据沈光宇教授的建议，后把这类代数命名为非交错 Hamilton 代数[8]。下面，我们把这类代数作一简单介绍。

设 $\quad P''(m,\boldsymbol{n}) = \{\sum_j f_j D_j \in W(m,\boldsymbol{n}) \mid D_i(f_j) = D_j(f_i),\ 1 \leq i,j \leq m\}$。

那么容易证明，$P''(m,\boldsymbol{n})$ 是 $W(m,\boldsymbol{n})$ 的子代数（作为滤过及阶化）。

定义映射

$$D_P: \begin{cases} \mathfrak{U}(m,\boldsymbol{n}) \to W(m,\boldsymbol{n}), \\ f \mapsto \sum_{j=1}^m D_j(f) D_j. \end{cases}$$

则 $\ker D_P = F1$，$P'(m,\boldsymbol{n}) := D_P(\mathfrak{U}(m,\boldsymbol{n})) \subseteq P''(m,\boldsymbol{n})$。定义

$$P(m,\boldsymbol{n}) := P'(m,\boldsymbol{n})^{(1)}.$$

可知，如果 $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{1}$，则 $P(m,\boldsymbol{n}) = P'(m,\boldsymbol{n})$；如果 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}$，则

$$P(m,\boldsymbol{n}) = \langle D_P(x^\alpha) \mid \alpha \in A(m,\boldsymbol{n}),\ \alpha \neq \gamma \rangle.$$

我们有如下

定理4.6 （1）假设 $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{1}$，则 $P(m,\boldsymbol{n})$ 是 $2^{|n|} - 1$ 维单代数。

（2）假设 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}$，则 $P(m,\boldsymbol{n})$ 是单的当且仅当 $m \geq 4$。$\dim P(m,\boldsymbol{1}) = 2^m - 2$。

然而，与一般的Cartan型李代数不同，我们有如下

定理4.7 假设 $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{1}$ 或 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}$，但 $m \geq 4$，则所有代数 $P(m,\boldsymbol{n})$ 均是不可局限的。

此外，通过对其导子代数的计算可以证明，其通常的滤过在某些条件下具有不变性。特别地，$P(m,\boldsymbol{1})$ 的通常滤过是不变滤过。于是它是一类新的单李代数。可以证明，当 $m \geq 4$ 时，

时，$P(m,1)$与Kaplansky在[11]中定义的第一类李代数$G(m)$是同构的。于是我们得到了$G(m)$的许多很好的性质。

除了以上我们所构造的非交错Hamilton代数之外，人们还构造了许多既非典型的，又非Cartan的代数，例如，Kaplansty在[11]中就构造了四类这样的代数。沈光宇利用普遍阶化李代数的方法，通过对G_2型典型李代数进行变形，也在特征2上构造了一系列低维的新的单李代数[12]。总之，在特征2以及其它小特征李代数方面还有许多工作可做，而对这些代数进行分类目前看来还是一项非常艰巨的任务。

致谢 作者对在本文写作过程中给予支持、帮助并提出很好建议的沈光宇教授表示感谢。

参考文献

1 Seligman G B. Modular Lie Algebras. Springer-Verlag, New York, 1967.

2 Strade H and Farnsteiner R. Modular Lie Algebras and Their Representations. Dekker, New York, 1988.

3 张禾瑞. Über Wittische Lie-ringe. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburh*, 1941, 14: 151—184.

4 Kostrikin A I and Safarevič I R. Graded Lie algebras of finite characteristic. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1969, 33: 251—322.

5 Block R E and Wilson R L. Classification of the restriced simple Lie algebras. *J. Algebra*, 1988, 114: 115—259.

6 林磊. 特征 $p=2$ 上的 Cartan 型李代数 $K(\mathscr{F},\mu_i)$ 及其子代数. 华东师范大学学报(自然科学版), 1988, 1: 16—23.

7 林磊. 特征2李代数. 华东师范大学博士学位论文, 1990年.

8 林磊. Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n,m)$ of Characteristic Two. *Comm. Algebra*, 1993, 21(2): 399—411.

9 张永正, 林磊. Lie algebra $K(n,\mu_i,m)$ of Cartan type of characteristic $p=2$. *Chin. Ann. of Math.*, 1992, 13B(3): 315—326.

10 薛小西. Cartan 型Lie代数$H_n(\mathscr{F})$、$K_n(\mathscr{F})$当特征等于2时的结构. 中国科学技术大学硕士学位论文.

11 Kaplansky I. Some simple Lie algebras of characteristic 2. *Lecture Notes in Math.*, 1982, 933: 127—129.

12 沈光宇. Variations of the classical Lie algebra G_2 in low characteristics. *Nova J. Algebra and Geometry*, 1993, 2(3): 217—243.

13 沈光宇. 阶化 Cartan 型李代数的阶化模(Ⅰ)— 模的混合积. 中国科学, A辑: 1986, 3: 255—264.

14 沈光宇. 阶化 Cartan 型李代数的阶化模(Ⅱ)——正、负阶化模. 中国科学, A辑, 1986, 5: 449—457.

15 沈光宇. Graded modules of graded Lie algebras of Cartan type(Ⅲ)——irreducible modules. *Chin. Ann. of Math.*, 1988, 9B(4): 404—417.

16 Strade H. The classification of the simple modular Lie algebras: Ⅰ. Determination of the two-sections. *Ann. of Math.*, 1989, 130: 643—677.

17 Strade H. The classification of the simple modular Lie algebras: Ⅱ. The total structure. *J. Algebra*, 1992, 151(2): 425—475.

18 Strade H. The classification of the simple modular Lie algebras: Ⅲ. Solution of the classical case. *Ann. of Math.*, 1991, 133: 577—604.

19 Strade H and Wilson R L. Classification of simple Lie algebras over algebraically closed fields of prime characteristic. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1991, 24(2): 357—362.

20 Brown G. A class of simple Lie algebras of characteristic three. *Proc. Amer. Math. Soc.*,

1989, 107(4): 901—905.

21 Jacobson N. Lie algebras. Interscience Publishers, 1962.

22 胡乃红. The graded modules for the graded contact Cartan algebras $K(n,m)$. 华东师范大学博士学位论文, 1993年.

23 Kac V G. Description of filtered Lie algebras with graded Lie algebras of Cartan type are associated. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1974, 38: 800—834.

24 Wilson R L. A structural characterization of the simple Lie algebras of generalized Cartan type over fields of prime characteristic. *J. Algebra*, 1976, 40: 418—465.

25 Block R E. Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal. *Ann. of Math.*, 1969, 90: 433—459.

26 Melikyan G M. On simple Lie algebras of characteristic 5 (in Russian). *Uspehi Mat. Nauk.*, 1980, 35(1): 203—204.

27 Kuznetsov M I. The Melikyan algebras as Lie algebras of the type G_2. *Comm. Algebra*, 1991, 19(4): 1281—1312.

A Survey on Lie Algebra of Prime Characteristic

Lin Lei

(*Dept. of Math., East China Normal University, Shanghai*, 200062)

Abstract During recent twenty years, in the study of Lie algebra of prime characteristic, a lot of outstanding advances have been obtained. This survey paper concerns with major achievements. It is essential (1) to recall definitions and structures of Lie algebras of Cartan type; (2) to introduce emphatically the two important classification theorems: the one of finite dimensional restricted Lie algebras and the other of non-restricted ones; (3) to make a survey of the results on the representation theory of Lie algebras, especially, on the graded representation theory of graded Lie algebras. In addition, since both the classification theorems do not concern with Lie algebras of small characteristic, achievements on the constructions of simple Lie algebras of small characteristic are reviewed.

Key words Lie algebra of prime characteristic; Cartan type; representation theory; small characteristics