一九九四年 第四期 华东师范大学学报（自然科学版） Journal of East China Normal University (Natural Science) No. 4 1994

(2) 9

三角函数的一个代数性质

林 磊
(华东师范大学数学系 上海 200062)

O174

提 要

本文讨论了三角函数在有理度数上的取值的代数性质，得出其取值均为代数数.

关键词: 三角函数 代数数 复数域，子域
中图分类号: *O*153.4

1 主要结果

首先，我们来回忆一下代数数的定义。设 $u\in\mathbf{C}$，若存在一非零多项式 $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$，使得 $f(u)=0$，则称 u 是一个代数数（参见 [1，第 4 章]）。我们的主要结果是

定理 1 设 $f(x)$ 是任一三角函数，a 是任一有理数，且使得 $f(a^\circ)$ 有定义，则 $f(a^\circ)$ 必是代数数。

由定理 1 容易得出

定理 2 给定 $g(x)\in\mathbf{Q}(x)$，$f(x)$ 是任一三角函数，a 是任一有理数，使得 $g(f(a^\circ))$ 有定义，则 $g(f(a^\circ))$ 是代数数。

2 定理的证明

由代数数的定义，容易得到

性质 1 a 是代数数当且仅当 $[\mathbf{Q}(a):\ \mathbf{Q}]<\infty$，即 $\mathbf{Q}(a)$ 是 $\mathbf{Q}$ 的有限扩域。

性质 2 代数数关于四则运算封闭，即代数数全体构成复数域 $\mathbf{C}$ 的子域。

若我们把全体代数数组成的集合记作 A，则由性质 2 知 A 是复数域 $\mathbf{C}$ 的子域，并且我们还有

性质 3 $a\in A$ 当且仅当存在 $0\neq f(x)\in A[x]$，使得 $f(a)=0$。

证明 由于 $\mathbf{Q}\subset A$，故必要性显然。

充分性：若存在 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i x^i\in A[x]$，使 $f(a)=0$，其中 $a_n\neq 0$。于是 $f(x)\in\mathbf{Q}(a_0,\ \cdots,\ a_n)[x]$。令 $K=\mathbf{Q}(a_0,\ \cdots,\ a_n)$，则 $[K(a):K]\leqslant n$。而由于每个 $a_i\in A$，故 $[K:\ \mathbf{Q}]<\infty$。所以，$[K(a):\ \mathbf{Q}]=[K(a):\ K][K:\ \mathbf{Q}]<\infty$。于是

$$[K(a):\ \mathbf{Q}]=[K(a):\ \mathbf{Q}(a)][\mathbf{Q}(a):\ \mathbf{Q}]<\infty,$$

本文于 1993 年 3 月 12 日收到。

即 $[\mathbf{Q}(a):\ \mathbf{Q}]<\infty$。由性质 1 知，$a\in A$。

引理 1 $\sin\theta\in A$ 当且仅当 $\cos\theta\in A$。

证明 如果 $\sin\theta\in A$，由于 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，应用性质 2 和性质 3，即可知 $\cos\theta\in A$。由对称性即知反之亦然。

由于引理 1，在以下的各引理的证明中，我们只需在命题 $\sin a°\in A$ 和 $\cos a°\in A$ 之间证明一个即可。

引理 2 $\sin 18°$，$\cos 18°\in A$。

证明 由计算知 $\sin 18°=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$。由于$\sqrt{5}$ 是 $x^2-5=0$ 的根，故$\sqrt{5}\in A$。所以由性质 2 知 $\sin 18°\in A$。

引理 3 $\sin 15°$，$\cos 15°\in A$。

证明 由于 $\sin 15°$ 满足方程

$$1-2x^2=\cos 30°,$$

而 $\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\in A$，故 $\sin 15°\in A$。

引理 4 $\sin 3°$、$\cos 3°\in A$。

证明 因为 $\sin 3°=\sin(18°-15°)=\sin 18°\cos 15°-\cos 18°\sin 15°$，由引理 2，引理 3 知 $\sin 18°$、$\cos 18°$、$\sin 15°$，$\cos 15°\in A$，故由性质 2 知 $\sin 3°\in A$。

引理 5 $\sin 1°$，$\cos 1°\in A$。

证明 由三角恒等式

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta,$$

知 $\cos 1°$ 满足方程

$$4x^3-3x-\cos 3°=0。$$

于是由引理 4 以及性质 3 知 $\cos 1°\in A$。

引理 6 若 $\cos(2a)°\in A$，则 $\sin a°$、$\cos a°\in A$。

证明 类似于引理 3。

引理 7 若 $\cos(na)°\in A$，其中 $n\in\mathbf{N}$，则 $\sin a°$、$\cos a°\in A$。

证明 由引理 6，不妨假设 $n=2r+1$ 是奇数。

由棣莫夫公式知

$$\begin{aligned}\cos n\theta&=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}\theta\sin^{2j}\theta\\&=\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{n}{2j}\cos^{n-2j}\theta(1-\cos^2\theta)^j.\end{aligned}$$

所以 $\cos a°$ 满足方程

$$\sum_{j=0}^{r}(-1)^j\binom{n}{2j}x^{n-2j}(1-x^2)^j-\cos(na)°=0。$$

由于上述等式的左边 x^n 的系数为 $2^{n-1}\neq 0$，所以，存在多项式 $0\neq f(x)\in A[x]$，使得 $f(\cos a°)=0$。由性质 3，得 $\cos a°\in A$。

引理 8 若 $\sin a^\circ$，$\sin b^\circ \in A$，则 $\sin(a+b)^\circ \in A$。

证明 利用公式

$$\sin(a+b)^\circ = \sin a^\circ \cos b^\circ + \cos a^\circ \sin b^\circ$$

以及性质 2 即得。

命题 1 对于任意给定的有理数 a，我们有 $\sin a^\circ \in A$。

首先，由引理 5 知，$\sin 1^\circ \in A$。又由引理 8 知：$\forall m \in \mathrm{N}$，$\sin m^\circ \in A$。于是若 $m \in \mathrm{Z}$，则 $\sin m^\circ \in A$。再由引理 7，$\forall n \in \mathrm{N}$，$\sin\left(\frac{m}{n}\right)^\circ \in A$。于是命题得证。

定理 1 的证明 由上述命题，定理 1 对 $f(x)=\sin x$ 成立。于是由引理 1 知，对 $f(x)=\cos x$ 也成立。因为

$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x},\quad \mathrm{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x},\quad \sec x = \frac{1}{\cos x},\quad \csc x = \frac{1}{\sin x},$$

所以由性质 2 可知定理成立。

定理 2 的证明 设 $g(x)=\frac{g_1(x)}{g_2(x)}$，其中 $g_1(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$，$g_2(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j \in \mathrm{Q}[x]$。则由性质 2 和定理 1 知

$$g(f(a^\circ)) = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i f(a^\circ)^i}{\sum_{j=0}^{m} b_j f(a^\circ)^j} \in A。$$

从而定理得证。

参考文献

[1] Jacobson N. *Basic Algebra I* (2nd Edition), W. H. Freeman and Company, New York, 1985

An Algebraic Property of Triangle Functions

Lin Lei

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062)

Abstract

This paper discusses an algebraic property of values of rational degrees of triangle functions. We obtain that they are all algebraic numbers.

Key words: triangle function   algebraic number