数 学 年 刊
15A: 3 (1994), 345—351.

(14) 特征 $p=2$ 的无限维 Cartan 型李代数 $K(m)$*

张 永 正
(东北师范大学数学系, 长春 130024)

林 磊
(华东师范大学数学系, 上海 200062)

345-351 O152.5

提 要

文[1]讨论了当基域的特征数 $p>3$ 时, 无限维 Cartan 型李代数的性质. 本文证明了当基域的特征数 $p=2$ 时, 由 Pfaff 微分型定义的无限维的 Cartan 型单李代数 $K(m)$ 的滤过不变性. 然后讨论了 $K(m)$ 的自同构与它结合的除幂代数的自同构的关系, 证明了 $K(m)$ 的每个自同构均是由它结合的除幂代数 $U(m)$ 的自同构所诱导的.

关键词 Cartan 型李代数 $K(m)$, ad-幂零元素, 特征.
MR(1991)主题分类 17B65.

嘉当型李代数, 无限维

§1. 滤过不变性

本文总假设基域 F 的特征数是 2. 设 $m\geqslant 3$ 是正奇数. $r=\dfrac{m-1}{2}$. 对 $\alpha\in\mathbf{N}^m$, 令 $|\alpha|=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i$. 设 $U(m)$ 是由生成子 $\{x^\alpha\mid\alpha\in\mathbf{N}^m\}$ 和定义关系 $x^\alpha x^\beta=\dbinom{\alpha+\beta}{\alpha}x^{\alpha+\beta}$ 决定的结合代数[1,5]. 我们知道, $U(m)_{[i]}=\langle x^\alpha\mid|\alpha|=i\rangle$ 给出了 $U(m)$ 的一个阶化结构, $U(m)_i=\bigoplus\limits_{j\geqslant i}U(m)_{[j]}$ 给出了相应的 $U(m)$ 的滤过结构. 我们称 $W(m)=\left\{\sum\limits_{i=1}^{m}f_iD_i\,\middle|\,f_i\in U(m)\right\}$ 为 W-型李代数, 其中 D_i 是使得 $D_i(x^\alpha)=x^{\alpha-\varepsilon_i}$ 的特殊导子. 令

$$W(m)_{[i]}=\langle fD_j\mid f\in U(m)_{[i+1]},\ j=1,\cdots,m\rangle,$$

则 $W(m)$ 是阶化李代数, 并且 $\{W(m)_i\}_{i\geqslant -1}$ 给出了 $W(m)$ 的相应的滤过结构.

令 $\mu_j\in F$, $j=1,\cdots,2r$, 使得

$$\mu_j+\mu_{j'}=1,$$

其中 $j'=j+r$, 若 $1\leqslant j\leqslant r$; $j'=j-r$, 若 $r<j\leqslant 2r$.

Pfaff 微分型 $\omega=dx^{\varepsilon_m}+\sum\limits_{j=1}^{2r}\mu_jx^{\varepsilon_j}dx^{\varepsilon_{j'}}$ 决定了 $W(m)$ 的子代数

$$K(m)=\{D\in W(m)\mid D\omega\in U(m)\cdot\omega\}.$$

我们称 $K(m)$ 为特征 2 的无限维 K-型李代数.

设 $f\in U(m)$. 令

$$D_K(f)=\sum_{j=1}^{2r}(D_{j'}f+\mu_jx^{\varepsilon_j}D_mf)D_j+\Big(f+\sum_{j=1}^{2r}\mu_jx^{\varepsilon_j}D_jf\Big)D_m.$$

本文 1991 年 10 月 24 日收到.
* 国家自然科学基金资助的项目.

仿照 [2]，得 $D_K(f)\in K(m)$，且 $K(m)=\{D_K(f)\mid f\in U(m)\}$及$[D_K(f),\ D_K(g)]=D_K(h)$，其中

$$h=\Big(f+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j x^{\varepsilon_j}D_j f\Big)D_m g+\Big(g+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j x^{\varepsilon_j}D_j g\Big)D_m f+\sum_{j=1}^{2r}(D_j f)(D_{j'}g). \tag{1.1}$$

令
$$K(m)_{[i]}=\langle D_K(x^\alpha)\mid |\alpha|+\alpha_m=i+2\rangle,$$
则 $K(m)=\bigoplus_{i\geq -2}K(m)_{[i]}$ 是阶化李代数．设$\{K(m)_i\}_{i\geq -2}$是相应的滤过结构．直接验证可知，$K(m)_0\subset W(m)_0$，$W(m)_0\cap K(m)=K(m)_0$．因为 $D_K(x^{\varepsilon_i+\varepsilon_m})=x^{\varepsilon_m}D_{i'}+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j x^{\varepsilon_j}x^{\varepsilon_i}D_j+\mu_i x^{\varepsilon_i+\varepsilon_m}D_m\notin W(m)_1$．所以 $K(m)_1\not\subseteq W(m)_1$．但是 $K(m)_2\subset W(m)_1$．

设 $S=\begin{pmatrix}0 & I_r\\ I_r & 0\end{pmatrix}$．我们知道，$\mathrm{sp}(2r)=\{(a_{ij})_{2r\times 2r}\mid S(a_{ij})=(a_{ij})^t S\}$是辛李代数．用 e_{ij} 表示$(i,\ j)$位置是 1，其余位置是零的矩阵．显然有计算公式

$$[e_{ij},\ e_{kl}]=\delta_{jk}e_{il}-\delta_{li}e_{kj}. \tag{1.2}$$

设 L 是李代数，$D\in L$，如果 $\mathrm{ad}D$ 是 L 的幂零自同态，则称 D 是 ad_L-幂零的．当 $L=K(m)$时，如不致混淆，我们也简称 D 是 ad-幂零的．

命题 1.1 (i) 设 $D=D'+D''$，其中 $D'\in K(m)_{[i]}$，$D''\in K(m)_{i+1}$，若 D 是 ad-幂零的，则 D' 亦然．

(ii) 设 $D\in K(m)$是 ad-幂零的，则 $D\in K(m)_0$．

设 Γ 是 $W(m)_{[0]}$-模 $W(m)_{[-1]}$所提供的表示．我们仍用 Γ 表示在基底$\{D_1,\cdots,D_m\}$上它所结合的矩阵表示，即

$$\Gamma: W(m)_{[0]}\to gl(m)$$
$$D=\sum a_{ij}x^{\varepsilon_i}D_j\mapsto -(a_{ij})^t.$$

下面的命题在特征 $p=2$ 时仍成立．

命题 1.2 (i) ([1] 的命题 3.2) 设 $D\in W(m)_{[0]}$，则 D 是 $\mathrm{ad}_{W(m)}$-幂零的当且仅当 $\Gamma(D)$是幂零阵．

(ii) ([1]的定理 4.1)设 L 是 $W(m)$的任一子代数，$AN_0=\{D\mid D\in W(m)_{[0]},\ \Gamma(D)$ 是幂零阵$\}$，$AN=AN_0+W(m)_1$，则集合 AN 中每个元素是 ad_L-幂零的．

因 $K(m)_0\subset W(m)_0$，故 $K(m)_0$ 的任一元素 D 可唯一地表为 $D=D_1+D_2$ 的形式，其中 $D_1=\sum_{i,j=1}^{m}a_{ij}x^{\varepsilon_i}D_j\in W(m)_{[0]}$，$D_2\in W(m)_1$．直接验证可知

$$\overline{\Gamma}: K(m)_0\to gl(m)$$
$$D=D_1+D_2\mapsto \Gamma(D_1)$$

是 $K(m)_0$ 的一个矩阵表示．

命题 1.3 $D\in K(m)_0$ 是 $\mathrm{ad}_{K(m)}$-幂零的当且仅当 $\overline{\Gamma}(D)$是幂零阵．

证 若 $\overline{\Gamma}(D)$是幂零阵，则 $\Gamma(D_1)$是幂零阵．由命题 1.2 的(i)知，D_1 是 $\mathrm{ad}_{W(m)}$-幂零的．由命题 1.2 的(ii)知，D 是 $\mathrm{ad}_{W(m)}$-幂零的．故 D 是 $\mathrm{ad}_{K(m)}$-幂零的．

反之，若 D 是 $\mathrm{ad}_{K(m)}$-幂零的．设$(\mathrm{ad}_{K(m)}D)^n=0$，则对 $\forall b_1,\cdots,b_m\in F$，有

$$0=(\mathrm{ad}_{K(m)}D)^n\Big(\sum_{i=1}^{2r}b_iD_K(x^{\varepsilon_i})+b_mD_K(1)\Big)$$

$$\equiv(\mathrm{ad}_{W(m)}(D_1+D_2))^n\Big(\sum_{l=1}^{m}b_lD_l\Big)\quad(\mathrm{mod}\,W(m)_0)$$

$$\equiv(\mathrm{ad}_{W(m)}D_1)^n\Big(\sum_{l=1}^{m}b_lD_l\Big)\quad(\mathrm{mod}\,W(m)_0).$$

故$(\mathrm{ad}_{W(m)_{[-1]}}D_1)^n=0$. 从而可知, $\Gamma(D_1)$是幂零阵, 故$\overline{\Gamma}(D)$是幂零阵.

设 $\overline{\Gamma}_0$ 是 $\overline{\Gamma}$ 在 $K(m)_{[0]}$ 上的限制, 则 $\overline{\Gamma}_0$ 是 $K(m)_{[0]}$ 的表示. 通过简单计算可证明以下

命题 1.4 $\overline{\Gamma}_0$ 是忠实表示. 进而

$$\overline{\Gamma}_0(K(m)_{[0]})=\mathrm{sp}(2r)_0\oplus F\Big(\sum_{i=1}^{2r}\mu_ie_{ii}+e_{mm}\Big),$$

其中 $\mathrm{sp}(2r)_0=\left\{\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}_{m\times m}\middle|\,A\in\mathrm{sp}(2r)\right\}$.

定义 若 $\mathrm{sp}(2r)$ 的子代数 B 是由幂零阵构成的, 则称 B 为诣零子代数.

命题 1.5 (i) $\mathrm{sp}(2r)$ 由它的所有幂零阵生成.

(ii) $\mathrm{sp}(2r)$中存在两个极大诣零子代数 B_1 和 B_2, 使得 $B_1\cap B_2=0$.

证 (i) 设 H 是 $\mathrm{sp}(2r)$ 的所有幂零阵生成的子代数. 只须证 $\mathrm{sp}(2r)$ 的标准基 $\{e_{ii'}$ $(1\leqslant i\leqslant 2r)$, $e_{ij'}+e_{ji'}(1\leqslant i<j\leqslant 2r)\}$含在 H 中. 而这可通过计算得到.

(ii) 由计算知, 子空间 $A_1=\langle e_{ii'}(1\leqslant i\leqslant r)$, $e_{ij'}+e_{ji'}(1\leqslant i<j\leqslant r)\rangle$与 $A'=\langle e_{ij'}+e_{ji'}$ $(r<j\leqslant 2r,\ j'>i)\rangle$都是 $\mathrm{sp}(2r)$ 的子代数, 并且 A_1 是 Abel 子代数以及$[A_1,\ A_1']\subset A_1$. 所以 $B_1=A_1+A_1'$ 是 $\mathrm{sp}(2r)$ 的子代数.

对 $\forall x\in B_1$, 则 x 可写成分块阵的形式: $x=\begin{pmatrix}K&N\\0&T\end{pmatrix}$, 其中 K 与 T 是幂零的 r 阶矩阵块. 设 $K^n=0=T^n$, 则 $x^{2n}=0$. 故 B_1 是诣零子代数. 下面证明 B_1 的极大性.

对 $\forall x\in\mathrm{sp}(2r)\backslash B_1$, 则由 x 与 B_1 生成的子代数 H 含有如下形式的非零阵:

$$y=\sum_{r<l\leqslant 2r}c_le_{ll'}+\sum_{r<l<j\leqslant 2r}c_{lj'}(e_{lj'}+e_{jl'})+\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\ j'<i}}c_{ij'}(e_{ij'}+e_{ji'}).\qquad(*)$$

通过对以下三种情形分别讨论, 可以证明 H 不是诣零子代数:

① 在$(*)$式右边的系数中, 有某个 $c_{kl'}\neq0$, 其中 $1\leqslant k\leqslant r$, $l'<k$(此时必有 $r<l\leqslant 2r$).

② 在$(*)$式右边所有的 $c_{ij'}=0(1\leqslant i\leqslant r,\ j'<i)$, 但有某个 $c_k\neq0(r<k\leqslant 2r)$.

③ 所有的 $c_{ij'}(1\leqslant i\leqslant r,\ j'<r)$与所有的 $c_i(r<i\leqslant 2r)$均为零.

令 $B_2=\{Q^t\,|\,Q\in B_1\}$, 则 B_2 也是极大诣零子代数, 且 $B_1\cap B_2=0$.

命题 1.6 $N_{\overline{\Gamma}_0(K(m)_{[0]})}(\mathrm{sp}(2r)_0)=\overline{\Gamma}_0(K(m)_{[0]})$.

证 由命题 1.4, 只须证$\Big[F\Big(\sum_{i=1}^{2r}\mu_ie_{ii}+e_{mm}\Big),\ \mathrm{sp}(2r)_0\Big]\subset\mathrm{sp}(2r)_0$ 即可.

设 $\mathscr{B}$ 是 $K(m)$的子代数. 若 $\mathscr{B}$ 的子代数 $\mathscr{A}$ 的每个元素都是 $\mathrm{ad}_{K(m)}$-幂零的, 则称 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{B}$ 的 ad-幂零子代数.

命题 1.7 (i) 若 $\mathscr{A}$ 是 $K(m)_{[0]}$ 的极大 ad-幂零子代数, 则 $\mathscr{A}+K(m)_1$ 是 $K(m)$ 的极大 ad-幂零子代数.

(ii) 设$\{\mathscr{A}_i\,|\,i\in\Lambda\}$是 $K(m)_{[0]}$ 的所有的极大 ad-幂零子代数, 则$\{\mathscr{A}_i+K(m)_1\,|\,i\in\Lambda\}$

恰为 $K(m)$ 的所有的极大 ad-幂零子代数.

我们用 nil 表示 $K(m)$ 中所有的 ad-幂零元素的集合.

命题 1.8　(i) 设 $D\in K(m)\setminus K(m)_{-1}$, 则存在 $E\in \mathrm{nil}$, 使得 $[D, E]\notin K(m)_0$.

(ii) 设 $D\in K(m)_{-1}\setminus K(m)_0$, 则存在 $E\in \mathrm{nil}$, 使得 $[D, E]\notin K(m)_0$.

证　(i) 设 $D=aD_K(1)+D'$. 其中 $D'=K(m)_{-1}$, $a\in F$, $a\neq 0$. 设 $E=D_K(x^{\varepsilon_i+\varepsilon_m})$, 其中 $1\leqslant i\leqslant 2r$. 则 $E\in \mathrm{nil}$. 易知 $[D, E]\notin K(m)_0$.

(ii) 设 $D=\sum\limits_{i=1}^{2r} a_i D_K(x^{\varepsilon_i})+D'$, 其中 $D'\in K(m)_0$, 且某个 $a_j\neq 0$. 令 $E=D_K(x^{2\varepsilon_{j'}})$. 则 $E\in \mathrm{nil}$ 且 $[D, E]\notin K(m)_0$.

定理 1.1　$K(m)_0$ 是 $K(m)$ 的不变子代数.

证　设 T_0 是由 $\mathrm{nil}\cap K(m)_{[0]}$ 生成的子代数. 由命题 1.3 与 1.4 知, $\overline{\Gamma}_0(T_0)$ 恰是由 $\mathrm{sp}(2r)_0 \oplus F\left(\sum\limits_{i=1}^{2r}\mu_i e_{ii}+e_{mm}\right)$ 中所有幂零阵生成的子代数. 于是 $\overline{\Gamma}_0(T_0)$ 恰是由 $\mathrm{sp}(2r)_0$ 中所有幂零阵生成的子代数. 由命题 1.5 知 $\overline{\Gamma}_0(T_0)=\mathrm{sp}(2r)_0$. 由命题 1.6 知 $[\overline{\Gamma}_0(K(m)_{[0]}), \mathrm{sp}(2r)_0]\subset \mathrm{sp}(2r)_0$. 故 $[\overline{\Gamma}_0(K(m)_{[0]}), \overline{\Gamma}_0(T_0)]\subset \overline{\Gamma}_0(T_0)$. 因 $\overline{\Gamma}_0$ 是忠实的, 故 $[K(m)_{[0]}, T_0]\subset T_0$.

令 Nil 是由 nil 生成的 $K(m)$ 的子代数. 则 $T_0\subset \mathrm{Nil}$. 易知, 对 $\forall D\in K(m)_1$, 则 $\overline{\Gamma}(D)$ 是幂零阵. 于是由命题 1.3 知, $K(m)_1\subset \mathrm{nil}\subset \mathrm{Nil}$, 所以 $T_0+K(m)_1\subset \mathrm{Nil}$. 若 $D=D_0+D_1\in \mathrm{nil}$, 其中 $D_0\in K(m)_{[0]}$, $D_1\in K(m)_1$, 由命题 1.1 的 (i), $D_0\in \mathrm{nil}$, 故 $D_0\in T_0$, 从而 $D\in T_0+K(m)_1$, 故 $\mathrm{nil}\subset T_0+K(m)_1$. 因 $T_0+K(m)_1$ 是子代数, 故 $\mathrm{Nil}\subset T_0+K(m)_1$. 从而 $\mathrm{Nil}=T_0+K(m)_1$. 于是

$$\begin{aligned}&[K(m)_{[0]}, \mathrm{Nil}]\\&=[K(m)_{[0]}, T_0+K(m)_1]\subset [K(m)_{[0]}, T_0]+K(m)_1\subset T_0+K(m)_1=\mathrm{Nil}.\end{aligned}$$

所以 $N_{K(m)}(\mathrm{Nil})\supset K(m)_{[0]}+\mathrm{Nil}=K(m)_0$. 由命题 1.8 知, $N_{K(m)}(\mathrm{Nil})=K(m)_0$, 因而 $K(m)_0$ 是不变子代数.

定理 1.2　(i) $K(m)_1$ 是 $K(m)$ 的不变子代数.

(ii) $\{K(m)_i\}_{i\geqslant -2}$ 是 $K(m)$ 的不变滤过.

证　由命题 1.3、命题 1.4 和命题 1.5 的 (ii) 知, 存在 $K(m)_{[0]}$ 的极大 $\mathrm{ad}_{K(m)}$-幂零子代数 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$, 使得 $\mathscr{A}_1\cap\mathscr{A}_2=0$, 从而可推得 $(\mathscr{A}_1+K(m)_1)\cap(\mathscr{A}_2+K(m)_1)=K(m)_1$.

设 $\{\mathscr{A}_i\mid i\in\Lambda\}$ 是 $K(m)_{[0]}$ 的所有的极大 $\mathrm{ad}_{K(m)}$-幂零子代数的集合. 设 Σ 是 $K(m)$ 的所有的极大 ad-幂零子代数的集合. 由命题 1.7 知, $\Sigma=\{\mathscr{A}_i+K(m)_1\mid i\in\Lambda\}$. 故 $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}(\mathscr{A}_i+K(m)_1)=K(m)_1$.

设 ϕ 是 $K(m)$ 的自同构. 由 ϕ^{-1} 也是 $K(m)$ 的自同构知, ϕ 诱导出双射

$$\Psi: \Sigma\to\Sigma$$

$$\mathfrak{B}\mapsto\phi(\mathfrak{B}).$$

从而 $\Sigma=\{\phi(\mathscr{A}_i+K(m)_1)\mid i\in\Lambda\}$. 故 $\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\phi(\mathscr{A}_i+K(m)_1)=K(m)_1$. 所以

$$\phi(K(m)_1)=\phi\Big(\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathscr{A}_i+K(m)_1)\Big)\subset\bigcap_{i\in\Lambda}\phi(\mathscr{A}_i+K(m)_1)=K(m)_1.$$

(ii) 由(i)和定理 1.1 即得.

注 1.1　用以上方法可以证明,当基域的特征为 2 时, $\{W(m)_i\}_{i\geq -1}$ 是 $W(m)$ 的不变滤过.

§2. 自　同　构

下面我们讨论 $K(m)$ 的自同构与它结合的除幂代数的自同构的关系.

设 $\tau\in \mathrm{Aut}\, U(m)$, 则映射 $\tilde{\tau}$: $D\mapsto \tau D\tau^{-1}$ 是 $\mathrm{Der}\, U(m)$ 的一个自同构. 设 N 是 $\mathrm{Der}\, U(m)$ 的子代数. 令

$$\mathrm{Aut}(U(m),\ N)=\{\tau\in \mathrm{Aut}\, U(m)\mid \tilde{\tau}(N)\subset N\}.$$

则 $\mathrm{Aut}(U(m),\ N)$ 是半群. 以下命题当基域的特征是 2 时仍是成立的.

命题 2.1[3]　若 $y_1,\ \cdots,\ y_m\in U(m)_1$, 并且 $\det(D_i y_j)$ 是 $U(m)$ 的单位. 则存在唯一的 $\tilde{\tau}\in \mathrm{Aut}(U(m),\ W(m))$, 使得 $\tau(x^{\varepsilon_i})=y_i, i=1,\cdots,m$. 此时 $\tau(x^{\varepsilon_i})^{(r)}=y_i^{(r)}, r\geq 0, i=1,\ \cdots,\ m$, 而且 $\{y_1,\ \cdots,\ y_m\}$ 是 $U(m)$ 的标准生成系. 半群 $\mathrm{Aut}(U(m),\ W(m))$ 是群, 映射 $\tau\mapsto\tilde{\tau}$ 是 $\mathrm{Aut}(U(m),\ W(m))$ 到 $\mathrm{Aut}\, W(m)$ 的单同态.

设 $H_i=D_K(x^{\varepsilon_i}),\ i=1,\ \cdots,\ 2r,\ H_m=D_K(1)$.

命题 2.2　(i) 若 $\psi\in \mathrm{Aut}\, W(m)$, 则存在 $W(m)_{[-1]}$ 的基底 $E_1,\ \cdots,\ E_m$, 使得 $\psi(H_i)\equiv E_i(\mathrm{mod}\, W(m)_0),\ i=1,\ \cdots,\ m$.

(ii) 设 $\phi\in \mathrm{Aut}\, K(m)$ 且 $\phi(H_i)=\sum\limits_{j=1}^{m}c_{ij}D_j$, 其中 $c_{ij}\in U(m)$. 则 $\det(c_{ij})$ 是 $U(m)$ 中的单位, 于是 $\{\phi(H_i)\mid i=1,\ \cdots,\ m\}$ 是自由 $U(m)$-模 $W(m)$ 的基.

证　(i) 由 $W(m)$ 的滤过不变性知, ψ 诱导出 F-空间 $W(m)/W(m)_0$ 的自同构 $\bar{\psi}$, 它使得 $\bar{\psi}(E+W(m)_0)=\psi(E)+W(m)_0$, 因 $\{H_i+W(m)_0\mid i=1,\ \cdots,\ m\}$ 是 $W(m)/W(m)_0$ 的基, 故 $\{\psi(H_i)+W(m)_0\mid i=1,\ \cdots,\ m\}$ 也是它的基. 故(i)成立.

(ii) 若 $\det(c_{ij})$ 不是 $U(m)$ 中的单位, 即 $\det(c_{ij})\equiv 0(\mathrm{mod}\, U(m)_1)$, 故 $\det(\bar{c}_{ij})=\bar{0}$, 其中 $\bar{c}_{ij}=c_{ij}+U(m)_1\in U(m)/U(m)_1$. 于是存在不全为 0 的 $a_i\in F$, $i=1,\ \cdots,\ m$, 使得 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i c_{ij}\in U(m)_1,\ j=1,\ \cdots,\ m$. 因 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i H_i\notin W(m)_0$, 故 $\sum\limits_i a_i H_i\notin K(m)_0$. 然而 $\phi(\sum\limits_i a_i H_i)=\sum\limits_i a_i(\sum\limits_j c_{ij}D_j)=\sum\limits_{i,j}a_i c_{ij}D_j\in W(m)_0\cap K(m)=K(m)_0$. 此与 $\phi(K(m)_0)=K(m)_0$ 矛盾.

命题 2.3　设 $\phi\in \mathrm{Aut}\, K(m)$, $\psi\in \mathrm{Aut}\, W(m)$. 如果 $\psi|_{K(m)_{[i]}}=\phi|_{K(m)_{[i]}}$, $i=-1,\ -2$, 则 $\phi=\psi|_{K(m)}$.

证　对 i 用归纳法证明 $\phi|_{K(m)_{[i]}}=\psi|_{K(m)_{[i]}}$.

假设上式对 $i<s$ 是成立的. 可设 $s\geq 0$. 令 $D\in K(m)_{[s]}$. 设 $T=\phi(D)-\psi(D)$. 由题设, $\phi(H_i)=\psi(H_i)$, $i=1,\ \cdots,\ m$. 故 $[T,\ \psi(H_i)]=\phi[D,\ H_i]-\psi[D,H_i]$. 由归纳假设, $\phi[D,\ H_i]=\psi[D,\ H_i]$, 从而 $[T,\ \psi H_i]=0$.

由命题 2.2 的(i), 存在 $W(m)_{[-1]}$ 的基 $\{E_i\}$, 使 $\psi(H_i)=E_i+Q_i$, $i=1,\ \cdots,\ m$, 其中 $Q_i\in W(m)_0$. 故 $[T,\ E_i+Q_i]=0$. 设 $E_i=\sum\limits_{l=1}^{m}a_{il}D_l$, $i=1,\ \cdots,\ m$. 则 $\left[T,\ \sum\limits_{l=1}^{m}a_{il}D_l\right]=$

$[T, -Q_i]$，$i=1, \cdots, m$. 因 $\det(a_{il})\neq 0$，故可推得

$$[T, D_l]=[T, R_l], \quad l=1, \cdots, m, \qquad (**)$$

其中 $R_l\in W(m)_0$.

因 $D\in K(m)_{[s]}$ 且 $s\geqslant 0$，故 $D\in W(m)_0$. 由 $K(m)$ 与 $W(m)$ 的滤过不变性知，$T=\phi D-\psi D\in W(m)_0$. 故可设 $T=\sum_{j=0}^{t} M_j$，其中 $M_j\in W(m)_{[j]}$. 将 $T=\sum_j M_j$ 代入 $(**)$ 式可推得 $[M_0, D_l]=0$，$l=1, \cdots, m$. 故 $M_0\in W(m)_{[-1]}$. 又因 $M_0\in W(m)_{[0]}$，故 $M_0=0$. 同理再由 $(**)$ 式可得 $M_k=0$，$k=1, \cdots, t$. 所以 $T=0$，即 $\phi D=\psi D$.

定理2.1 $\mathrm{Aut}(U(m), K(m))$ 与 $\mathrm{Aut}\, K(m)$ 在映射 $\tau\mapsto\tilde{\tau}$ 之下是同构的，其中 $\tilde{\tau}(D)=\tau D\tau^{-1}$，$\forall D\in K(m)$.

证 先证此映射是满的，即去证，对 $\forall\phi\in \mathrm{Aut}\, K(m)$，存在 $\tau\in \mathrm{Aut}(U(m), W(m))$，使得 $\phi=\tilde{\tau}|_{K(m)}$.

令 $E_0=\phi(D_K(1))$，$E_i=\phi(D_K(x^{\varepsilon_i}))$，$i=1, \cdots, m$. 由命题2.2的(ii)知，$E_0, E_1, \cdots, E_{2r}$ 是自由 $U(m)$-模 $W(m)$ 的基. 故可设 $E_m=\sum_{i=0}^{2r} q_iE_i$. 因 $D_K(1)=[D_K(1), D_K(x^{\varepsilon_m})]$，则

$$E_0=[E_0, E_m]=\sum_{i=0}^{2r} E_0(q_i)E_i.$$

因为 $\mu_{i'}D_K(x^{\varepsilon_i})=[D_K(x^{\varepsilon_i}), D_K(x^{\varepsilon_m})]$，故

$$\mu_{i'}E_i=[E_i, E_m]=\sum_{j=0}^{2r} E_i(q_j)E_j+q_{i'}E_0, \quad i=1, \cdots, 2r.$$

所以
$$E_i(q_j)=\begin{cases}1, & i=j=0,\\ \mu_{i'}, & 1\leqslant i=j<m,\\ -q_{i'}, & 1\leqslant i<m,\ j=0,\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

令 $T=\sum_{i=1}^{r} D_K(x^{\varepsilon_i+\varepsilon_{i'}})$，$Q=\phi(T)$. 设 $Q=\sum_{j=0}^{2r} p_jE_j$. 由 $[D_K(1), T]=0$ 知，$0=[E_0, Q]=\sum_{j=0}^{2r} E_0(p_j)E_j$. 由 $D_K(x^{\varepsilon_i})=[D_K(x^{\varepsilon_i}), T]$ 知

$$E_i=[E_i, Q]=\sum_{j=0}^{2r} E_i(p_j)E_j+p_{i'}E_0, \quad i=1, \cdots, 2r,$$

所以
$$E_i(p_j)=\begin{cases}0, & i=j=0,\\ 1, & 1\leqslant i=j<m,\\ -p_{i'}, & 1\leqslant i<m,\ j=0,\\ 0, & \text{其它情形}.\end{cases}$$

因为 $[D_K(x^{\varepsilon_m}), T]=0$，故有 $0=[E_m, Q]=\left[\sum_{i=0}^{2r} q_iE_i, \sum_{j=0}^{2r} p_jE_j\right]=\left(-p_0+\sum_{i=1}^{2r} q_iq_{i'}\right)E_0+\sum_{i=1}^{2r}(q_i-\mu_{i'}p_i)E_i$. 于是

$$q_i=\mu_{i'}p_i, \quad i=1, \cdots, 2r.$$

令 $y_m=q_0+p_0$，$y_i=p_{i'}$，$1\leqslant i\leqslant 2r$. 则 $\det(E_i(y_j))=1$.

设 $E_i=\sum_j c_{ij}D_j$，则有矩阵等式：$(E_i(y_j))=(c_{ij})(D_i(y_j))$．由命题 2.2 的(ii)，$\det(c_{ij})$ 是 $U(m)$ 中的单位．故 $(D_i(y_j))$ 是 $U(m)$ 中的可逆阵．由命题 2.1，存在 $\tau\in \mathrm{Aut}(U(m), W(m))$，使得 $\tau(x^{\varepsilon_i})^{(r)}=y_i^{(r)}$，$i=1, \cdots, m$，$r\geqslant 0$．易知 $\tilde{\tau}|_{K(m)_{[i]}}=\phi|_{K(m)_{[i]}}$，$i=-2, -1$．由命题 2.3，$\phi=\tilde{\tau}|_{K(m)}$．

下面再证映射 $\tau\mapsto\tilde{\tau}$ 是单的，即去证，若 $\tau\in \mathrm{Aut}(U(m), K(m))$ 且 $\tilde{\tau}|_{K(m)}=id_{K(m)}$，则 $\tau=id_{U(m)}$．

因 $\tilde{\tau}|_{K(m)}=id_{K(m)}$，故 $\tau D_K(1)=D_K(1)\tau$，$\tau D_K(x^{\varepsilon_i})=D_K(x^{\varepsilon_i})\tau$，从而有

$$D_m(\tau x^{\varepsilon_j})=0,\quad 1\leqslant j<m, \tag{2.1}$$

$$D_m(\tau x^{\varepsilon_m})=1, \tag{2.2}$$

$$(D_{i'}+\mu_{i'}x^{\varepsilon_i}D_m)(\tau x^{\varepsilon_j})=\delta_{i'j}, \tag{2.3}$$

$$(D_{i'}+\mu_{i'}x^{\varepsilon_i}D_m)(\tau x^{\varepsilon_m})=\mu_{i'}\tau(x^{\varepsilon_i}). \tag{2.4}$$

将(2.1)代入(2.3)式得，$D_i(\tau x^{\varepsilon_j})=\delta_{ij}$，$1\leqslant i, j\leqslant 2r$，故有

$$\tau(x^{\varepsilon_j})=x^{\varepsilon_j},\quad j=1, \cdots, 2r. \tag{2.5}$$

将(2.2)与(2.5)式代入(2.4)式得，$\tau x^{\varepsilon_m}=x^{\varepsilon_m}$．因 $x^{\varepsilon_1}, \cdots, x^{\varepsilon_m}$ 是 $U(m)$ 的标准生成系，故 $\tau=id_{U(m)}$．

注 1.2　对于特征 2 的有限维 Cartan 型李代数 $K(n, \mu_j, \mathbf{m})$（见[8]），定理 2.1 仍是成立的，因为上面的证明完全适用于有限维的情形．

参 考 文 献

[1] Jin, Ning, Locally Nilpotent and Quasi-nilpotent Elements of Infinite Lie Algebra of Cartan Type, 华东师范大学博士学位论文 (1990).

[2] Lin, Lei, Lie Algebras $K(\mathcal{F}, \mu_i)$ of Cartan Type of Characteristic $p=2$ and Their Subalgebras, (in Chinese), *J. East China Normal Univ.*, **1** (1988), 16—23.

[3] Wilson, R. L., Classification of Generalized Witt Algebras over Algebraically Closed Fields, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971), 191—210.

[4] Humphreys, J. E., Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag, New York, 1972.

[5] Strade, H. and Farnsteiner, R., Modular Lie Algebra and Their Representations, Marcel Dekker, Inc, New York and Basel, 1988.

[6] Shen, Guangyu, Notes on Lie Algebra $\Sigma(n, m, r, G)$, *Chin. Ann. of Math.*, **8B**: 3 (1987), 329—331.

[7] Kostrikin, A. I. and Shafarevic, I. R., Graded Lie Algebras of Finite Characteristic, *Math. USSR-Izv*, **3** (1969), 237—304.

[8] Zhang, Yongzheng and Lin, Lei, Lie Algebra $K(n, m, \mu_j)$ of Cartan Type of Characteristic $p=2$, *Chin. Ann. of Math.*, **13B**: 3 (1992), 315—326.