

第八届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷

(数学类, 2017年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

- 注意: 1. 前4大题是必答题, 再从 5–10大题中任选三题, 题号要填如上面的表中.
 2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 20 分)填空题(每小题 5 分)

- 答
题
时
不
要
超
过
此
线

密
封
线

所
在
院
校:

准
考
证
号:

姓
名:
- (1) 设 $x^4+3x^2+2x+1=0$ 的 4 个根为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, 则行列式
$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 \\ \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_4 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0.$$
- (2) 设 a 为实数, 关于 x 的方程 $3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a = 0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足 $a > 27$ or $a < -37$.
- (3) 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{axydz + (z+a)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ ($a > 0$ 为常数), 其中 $S: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 取上侧. $I = -\frac{\pi}{2}a^3$.
- (4) 记两特征值为 1, 2 的 2 阶实对称矩阵全体为 Γ . $\forall A \in \Gamma$, a_{21} 表示 A 的 $(2, 1)$ 位置元素. 则集合 $\cup_{A \in \Gamma} \{a_{21}\}$ 的最小元 = $\frac{-1}{2}$.

参考答案. 因为该多项式无 3 次方项, 故 4 个根之和为 0. 行列式的每一列加到第一列即可得行列式值为 0.

参考答案. 记: $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a$. $f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 60x + 72 = 12(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) = 12(x-1)(x-3)(x+2)$. f 在 -2 和 3 取得极小值 $-152 + a$ 和 $-27 + a$, f 在 1 取得极大值 $37 + a$.

因此, 当且仅当 $a > 27$ 或 $a < -37$ 时方程有虚根.

解：令曲面 $S_1 : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq a^2 \\ z = 0 \end{cases}$, 取下侧, 则 $S_1 \cup S$ 为闭下半球面的内侧.
 设其内部区域为 Ω , 令 D 为 xOy 平面上的圆域 $x^2 + y^2 \leq a^2$, 则利用高斯公式, 得

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} \left\{ \iint_{S \cup S_1} - \iint_{S_1} [adx dy dz + (z+a)^2 dx dy] \right\} \\ &= \frac{1}{a} \left[- \iiint_{\Omega} (3a+2z) dv + \iint_D a^2 dx dy \right] \\ &= \frac{1}{a} \left[- 2\pi a^4 - 2 \iint_D \iint_{\Omega} z dv + \pi a^4 \right] \\ &= -\pi a^3 - \frac{2}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a r dr \int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z dz \\ &= -\frac{\pi}{2} a^3. \end{aligned}$$

参考答案. $A = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Q^T$, Q 可表为 $\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$.
 故 $a_{21} = -\sin t \cos t$, 立即得结果。

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____



得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面 Γ 于曲线 C . 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

解: 交线为抛物线或为椭圆 (5分)

- 1) 如果平面 P 平行于 z -轴, 则相交曲线 $C = \Gamma \cap P$ 可以经过以 z -为旋转轴的旋转, 使得 P 平行于 yz -平面, C 的形状不变. 所以可不妨设 P 的方程为 $x = c$, 交线 C 的方程为 $z = \frac{1}{2}(c^2 + y^2)$. 将 C 投影到 yz -平面上, 得到抛物线 $z - \frac{c^2}{2} = \frac{1}{2}y^2$. 由于平面 P 平行于 yz -轴, 故交线为抛物线. (10分)
- 2) 如果平面 P 不平行于 z -轴, 我们设 P 的方程为 $z = ax + by + c$. 代入旋转抛物面 Γ 的方程为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$, 得到

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 + 2c := R^2.$$

将 $C = \Gamma \cap P$ 垂直投影到 xy -平面, 得到圆周 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$. 令 Q 是以这个圆为底的圆柱, 则 C 也是圆柱 Q 与平面 P 的交线. 在圆柱 Q 中从上或从下放置半径为 R 的球体, 它与平面 P 相切于 F_1 和 F_2 , 与圆柱 Q 相交于圆 D_1 和 D_2 . 对 $C = Q \cap P$ 上的任意一点 A , 过 A 点的圆柱母线交圆 D_1 于 B_1 , 交圆 D_2 于 B_2 . 则线段 B_1B_2 为定长. 这时, 由于球的切线长相等, 得到

$$|AF_1| + |AF_2| = |AB_1| + |AB_2| = |B_1B_2|,$$

为常数. 故曲线 C 为椭圆. (15分)



得分	
评阅人	

三、证明题 (15分) 设 n 阶方阵 A, B 满足: 秩(ABA) = 秩(B). 证明: AB 与 BA 相似.

证明: 设

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q, \quad B = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1}$$

其中 P, Q 是可逆方阵, B_1 是 r 阶方阵, 则有 (5分)

$$AB = P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1}, \quad BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ B_3 & O \end{pmatrix} Q, \quad ABA = P \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

由 $\text{rank } ABA = \text{rank } B_1 = \text{rank } B$ 可得, 存在矩阵 X, Y 使得 $B_2 = B_1X, B_3 = YB_1$.
从而有

$$\begin{aligned} AB &= P \begin{pmatrix} I & -X \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ O & I \end{pmatrix} P^{-1}, \\ BA &= Q^{-1} \begin{pmatrix} I & O \\ Y & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O \\ -Y & I \end{pmatrix} Q. \end{aligned}$$

因此, AB 与 BA 相似. (15分)

专业: _____

考生座位号: _____

所在院校: _____

准考证号: _____

姓名: _____

<input type="radio"/>	得分	
<input type="radio"/>	评阅人	

四、(本题20分) 对 \mathbb{R} 上无穷次可微的(复值)函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi \in \mathcal{S}$, 如果 $\forall m, k \geq 0$ 有

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi^{(k)}(x)| < +\infty.$$

若 $f \in \mathcal{S}$, 可定义 $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi ixy} dy$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). 证明: $\hat{f} \in \mathcal{S}$, 且

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

证明: 由于 $f \in \mathcal{S}$, 因此存在 $M_1 > 0$ 使得

$$|2\pi ixf(x)| \leq \frac{M_1}{x^2 + 1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

这样, $\int_{\mathbb{R}} (-2\pi iy) f(y) e^{-2\pi ixy} dy$ 关于 $x \in \mathbb{R}$ 一致收敛, 从而可得 (2分)

$$\frac{d}{dx} \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} -2\pi iy f(y) e^{-2\pi ixy} dy. \quad (2)$$

(4分)

同理可得

$$\frac{d^n}{dx^n} \hat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} (-2\pi iy)^n f(y) e^{-2\pi ixy} dy. \quad (3)$$

而利用分部积分立即得到

$$(f^{(n)})^\wedge(x) = (2\pi ix)^n \hat{f}(x), \quad \forall n \geq 0. \quad (4)$$

结合 (3)–(4) 并利用 $f \in \mathcal{S}$, 可得对任何 $m, k \geq 0$,

$$\begin{aligned} & x^m \frac{d^k}{dx^k} \hat{f}(x) \\ = & \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\mathbb{R}} \frac{d^m}{dy^m} ((-2\pi iy)^k f(y)) e^{-2\pi ixy} dy \end{aligned}$$

在 \mathbb{R} 上有界. 从而 $\hat{f} \in \mathcal{S}$. 于是, $\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy$ 收敛, 而

$$\begin{aligned}
& \int_{-A}^A \hat{f}(y) e^{2\pi ixy} dy \\
&= \int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{2\pi i(x-t)y} dt \\
&= \int_{-A}^A dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) e^{2\pi i t y} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-A}^A f(x-t) e^{2\pi i t y} dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t) \frac{\sin(2\pi At)}{\pi t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At) dt + f(x).
\end{aligned} \tag{5}$$

(15分)

上式中的第一项直接计算 (如: 用分部积分法) 后, 可得

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x-t) - f(x)}{\pi t} \sin(2\pi At) dt = 0. \tag{6}$$

结合 (5) 和 (6) 即得结论.

(20分)

姓名:_____ 准考证号:_____ 所在院校:_____ 考生座位号:_____ 专业:_____

得分	
评阅人	

五、(本题10分) 设 $(F, +, \cdot)$ 是特征为 $p(p \neq 0)$ 的域, 1 和 0 分别为 F 的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F, +)$ 到其乘法半群 (F, \cdot) 的同态, 即 $\forall x, y \in F$ 有 $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$. 证明: φ 要么将 F 的所有元映照为0, 要么将 F 的所有元映照为1.

证明: 假定 φ 不恒为0, 则 $\exists a \in F$ 使得 $\varphi(a) \neq 0$. (2分)

于是由 $\varphi(0+a) = \varphi(a)$ 知

$\varphi(a) = \varphi(0)\varphi(a)$ 导致 $\varphi(0) = 1$. (5分)

进而 $\forall x \in F$ 有

$$1 = \varphi(0) = \varphi(\underbrace{x + \cdots + x}_p) = (\varphi(x))^p,$$
$$(\varphi(x))^p - 1 = 0.$$

注意到 $ChF = p$, p 为素数, 故有 $\forall a, b \in F$

$$(a+b)^p = a^p + b^p;$$

进而

$$(a-b)^p = a^p - b^p.$$

结果由 $(\varphi(x))^p - 1 = 0$ 立得

$$(\varphi(x) - 1)^p = 0,$$

$\varphi(x) = 1$. 证毕. (10分)

得分	
评阅人	

六、(本题10分) 1) 设 E 是三分Cantor集, 证明 $\chi_E(x)$ 不是 $[0, 1]$ 上的有界变差函数.

2) 设 $E \subset [0, 1]$, 证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界变差的充要条件是 E 的边界点集是有限集.

1) 答: $\chi_E(x)$ 不是 $[0, 1]$ 上的有界变差函数.

作 $[0, 1]$ 的分划 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1$, 其中 $x_0 \in E, x_2 \in E, \dots, x_n \in E; x_1 \notin E, x_3 \notin E, \dots, x_{n-1} \notin E$.

构造如下: $\forall n \geq 1$, 先取 $x_0 = 0, x_2, x_4, \dots, x_{n-2} \in E, x_n = 1$, 由 E 的构造知: $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{n-2}, x_n]$ 中有无穷多不属于 E 的点, 取 $x_1 \in (x_0, x_2) \setminus E, x_3 \in (x_2, x_4) \setminus E, \dots, x_{n-1} \in (x_{n-2}, x_n) \setminus E$. 于是 $\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| = n$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \rightarrow \infty$, 即 $\bigvee_0^1 (\chi_E(x)) = +\infty$. (3分)

2) 证明: \Rightarrow) 反证法. 假设 E 有无穷多边界点 $\{c_j\}_{j=1}^\infty$.

$\forall n > 1$, 造 $[0, 1]$ 的分划 Δ 如下: 取 $x_0 = 0$, 在 $\{c_j\}_{j=1}^\infty$ 中任取 n 个点按大小排列记为 $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$. 由边界点的定义: $\forall \varepsilon > 0, U(c_i, \varepsilon) \cap E \neq \emptyset$ 且 $U(c_i, \varepsilon) \cap \mathcal{C}E \neq \emptyset (1 \leq i \leq n)$, 对 $0 < \epsilon < \frac{1}{2} \min\{c_{i+1} - c_i; i = 1, 2, \dots, n-1\}$,

若 $x_0 \in E$, 取 $x_1 \in (x_0, c_1 + \varepsilon) \cap \mathcal{C}E, x_2 \in (x_1, c_2 + \varepsilon) \cap E, x_3 \in (x_2, c_3 + \varepsilon) \cap \mathcal{C}E, x_4 \in (x_3, c_4 + \varepsilon) \cap E, \dots$.

若 $x_{n-2} \in \mathcal{C}E$, 取 $x_{n-1} \in (x_{n-2}, c_{n-1} + \varepsilon) \cap E, x_n = 1$.

于是 $\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \geq n-1$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \rightarrow \infty$, 即 $\bigvee_0^1 (\chi_E(x)) = +\infty$, 与 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界变差矛盾, 故假设不真. (7分)

\Leftarrow) 设 c_1, c_2, \dots, c_m 是 E 的边界点, m 有限.

对任意 $[0, 1]$ 的分划 $\Delta: 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = 1, n$ 个小区间 $[x_i, x_{i+1}] (0 \leq i \leq n-1)$ 中至多 m 个含有 $\{c_i\}_{i=1}^m$ 的点, 也即 $[x_i, x_{i+1}] (0 \leq i \leq n-1)$ 中至多 m 个小区间中既有 E 的点同时也有 $\mathcal{C}E$ 的点. 由 $\chi_E(x)$ 的定义有

$$|\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| = \begin{cases} 1, & x_i \in E, x_{i-1} \in \mathcal{C}E \text{ or } x_i \in \mathcal{C}E, x_{i-1} \in E, \\ 0, & x_i, x_{i-1} \in E \text{ or } x_i, x_{i-1} \in \mathcal{C}E. \end{cases}$$

于是 $\sum_{i=1}^n |\chi_E(x_i) - \chi_E(x_{i-1})| \leq m \Rightarrow \bigvee_0^1 (\chi_E(x)) \leq m < \infty$. (10分)

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

得分	
评阅人	

七、(本题10分) 设 S 为三维欧氏空间中的一张连通光滑的正则曲面, 过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上. 证明: S 是平面的一部分.

证明: 设 k_1 和 k_2 为曲面 S 的两个主曲率, 它对应的单位主方向为 e_1 和 e_2 . 设 v 是 $p \in S$ 点处单位切向量, 它与 e_1 的交角为 θ . 则沿 v 的方向法曲率为

$$k_n(v) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

(3分)

在 $p \in S$ 点记 σ 为曲面法向量 N 和 v 张成的平面, 它截曲面 S 为曲线 C , C 称为 S 沿 v 方向的法截线. 则法曲率 $k_n(v)$ 等于法截线 C 在平面 σ 上 p 点处的相对曲率. 因为 p 点处沿三个不同方向 v_1, v_2, v_3 的法截线 C 为直线, 故存在不同的 θ_1, θ_2 和 θ_3 , $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$ 使得

$$k_n(v_1) = k_1 \cos^2 \theta_1 + k_2 \sin^2 \theta_1 = 0;$$

$$k_n(v_2) = k_1 \cos^2 \theta_2 + k_2 \sin^2 \theta_2 = 0;$$

$$k_n(v_3) = k_1 \cos^2 \theta_3 + k_2 \sin^2 \theta_3 = 0.$$

(6分)

如果 $(k_1, k_2) \neq (0, 0)$, 则存在 $\varepsilon_1 = \pm 1, \varepsilon_2 = \pm 1$ 有

$$\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \varepsilon_1 \cos \theta_1 \sin \theta_2 = \sin(\theta_1 + \varepsilon_1 \theta_2) = 0;$$

$$\sin \theta_1 \cos \theta_3 + \varepsilon_2 \cos \theta_1 \sin \theta_3 = \sin(\theta_1 + \varepsilon_2 \theta_3) = 0;$$

$$\sin \theta_2 \cos \theta_3 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cos \theta_2 \sin \theta_3 = \sin(\theta_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \theta_3) = 0.$$

由于 $0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 < \pi$, 故有

$$\theta_1 + \varepsilon_1 \theta_2 = 0, \quad \theta_1 + \varepsilon_2 \theta_3 = 0, \quad \theta_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \theta_3 = 0.$$

于是推出 θ_1, θ_2 和 θ_3 必有两个相同, 矛盾. 故在曲面 S 的任何点 p 有 $k_1 = k_2 = 0$.

(8分)

由此推出Weingarten变换 $W \equiv 0$. 将曲面 S 参数化为 $x(u, v)$, 它的法向量为 $N(u, v)$. 则有

$$W(x_u) = -N_u = 0, \quad W(x_v) = -N_v = 0.$$

故法向量 N 为常向量. 再由

$$x_u \cdot N = x_v \cdot N = 0,$$

得到 $x \cdot N = c$ 为常数. 故 S 落在一张平面上.

(10分)

得分	
评阅人	

八、(本题10分) 考虑求解一阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

的Runge-Kutta法.

(1) 确定下列三级三阶Runge-Kutta法中的所有特定参数:

$$y_{n+1} = y_n + h(c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_3 K_3) \quad (7)$$

其中

$$K_1 = f(x_n, y_n), \quad K_2 = f(x_n + ah, y_n + b_{21}hK_1), \quad K_3 = f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2).$$

(2) 讨论上述Runge-Kutta格式的稳定性。

解: 1. 对 $y' = f(x, y)$ 两边取积分得:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx.$$

由Simpson公式有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \frac{h}{6} [f(x_n, y(x_n)) + 4f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) + f(x_{n+1}, y(x_{n+1}))] + O(h^5) \quad (8)$$

因此可令 $c_1 = 1/6, c_2 = 4/6, c_3 = 1/6$ 。 (2分)

令 $y_n = y(x_n)$ 。将(7)与(8)两式相减得:

$$\begin{aligned} y(x_{n+1}) - y_{n+1} &= \frac{2h}{3} [f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1)] \\ &\quad + \frac{h}{6} [f(x_{n+1}, y(x_{n+1})) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hK_1 + b_{32}hK_2)] \end{aligned}$$

我们只需选取参数 $a_2, a_3, b_{21}, b_{31}, b_{32}$ 使得上式右端为 $O(h^4)$ 。

注意到 $y'(x_n) = f(x_n, y(x_n))$, 并记 $f_n = f(x_n, y(x_n))$, 将 $y(x_n + h/2)$ 做Taylor展开得

$$\begin{aligned} &f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \\ &= f(x_n + h/2, y(x_n) + hf_n/2 + h^2y''(x_n)/8 + O(h^3)) - f(x_n + a_2h, y_n + b_{21}hK_1) \end{aligned}$$

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:



为使上式达到要求的精度, 应取 $a_2 = 1/2$, $b_{21} = 1/2$ 。于是利用Taylor展开有

$$f(x_n + h/2, y(x_n + h/2)) - f(x_n + h/2, y_n + hK_1/2) = \frac{h^2}{8}y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3)$$

另一方面

$$\begin{aligned} & f(x_n + h, y(x_n + h)) - f(x_n + a_3h, y_n + b_{31}hf_n + b_{32}hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n)) \\ &= f(x_n + h, y(x_n) + hf_n + h^2y''(x_n)/2 + O(h^3)) \\ &\quad - f(x_n + a_3h, y_n + (b_{31} + b_{32})hf_n + b_{32}h^2/2(f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f_n) + O(h^3)) \end{aligned}$$

为使上式达到给定精度, 应令 $a_3 = 1$, $b_{31} + b_{32} = 1$ 。注意到 $y''(x_n) = f_x(x_n, y_n) + f_y(x_n, y_n)f_n$, 再次利用Taylor展开得

$$\begin{aligned} & f(x_n + h, y(x_n + h)) - f(x_n + a_3h, b_{31}hf_n + b_{32}hf(x_n + h/2, y_n + h/2f_n)) \\ &= \frac{h^2}{2}(1 - b_{32})y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^3). \end{aligned}$$

综合上式诸式得

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = \frac{h^3}{12}(2 - b_{32})y''(x_n)f_y(x_n, y_n) + O(h^4)$$

令 $h_{32} = 2$, 即得到了三级三阶Runge-Kutta格式的所有参数。 (7分)

2. 下面讨论三级三阶Runge-Kutta格式的稳定性。对微分方程 $y' = \lambda y$ 应用上述Runge-Kutta格式得:

$$K_1 = \lambda y_n, \quad K_2 = \lambda(1 + \frac{1}{2}\lambda h)y_n \quad K_3 = \lambda(1 + \lambda h + (\lambda h)^2)y_n$$

从而有

$$y_{n+1} = (1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3)y_n$$

故格式稳定条件是

$$|1 + \lambda h + \frac{1}{2}(\lambda h)^2 + \frac{1}{6}(\lambda h)^3| < 1$$

(10分)

得分	
评阅人	

九、(本题10分) 设函数 $f(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析, 并且 $|f(z)| \leq M$ ($M > 0$, M 为常数). 证明 $|f'(0)| \leq M - \frac{|f(0)|^2}{M}$.

证明: 令 $w = w(z) = \frac{f(z)}{M}$, 做变换

$$F(z) = \frac{w(z) - w(0)}{1 - \overline{w(0)}w(z)}, \text{ 这里 } w(0) = \frac{f(0)}{M}. \quad (4 \text{ 分})$$

则该变换把单位圆 $|w| < 1$ 映射为 $|F(z)| < 1$. 由施瓦兹引理

$$|F'(0)| \leq 1. \quad (6 \text{ 分})$$

由于

$$F'(z)|_{z=0} = \left(\frac{w(z) - w(0)}{1 - \overline{w(0)}w(z)} \right)'|_{z=0} = \frac{w'(0)}{1 - |w(0)|^2} = \frac{f'(0)M}{M^2 - |f(0)|^2},$$

则

$$\left| \frac{f'(0)M}{M^2 - |f(0)|^2} \right| \leq 1, |f'(0)|M \leq |M^2 - |f(0)|^2|$$

由于在单位圆 $|z| < 1$ 内 $|f(z)| \leq M$ ($M > 0$), 特别地 $|f(0)| \leq M$. 于是

$$|M^2 - |f(0)|^2| = M^2 - |f(0)|^2$$

即

$$|f'(0)|M \leq M^2 - |f(0)|^2.$$

证毕. (10分)

专业:

考生座位号:

所在院校:

姓名: 准考证号:

得分	
评阅人	

十、(本题10分) 设 $\{X_n\}$ 是独立同分布的随机变量序列, 且 $P(X_n = 0) = P(X_n = a) = \frac{1}{2}$, 其中常数 $a > 0$. 记 $Y_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{2^k}$. 求 Y_n 的特征函数, 并证明其分布收敛于区间 $[0, a]$ 上的均匀分布.

解: X_k 的特征函数为

$$f_{X_k}(t) = Ee^{itX_k} = \frac{1}{2}(e^{iat} + 1) = \exp\left\{\frac{iat}{2}\right\} \cos \frac{at}{2} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

(2分)

所以 $\frac{X_k}{2^k}$ 的特征函数为 $f_{X_k/2^k}(t) = f_{X_k}(t/2^k) = \exp\left\{\frac{iat}{2^{k+1}}\right\} \cos \frac{at}{2^{k+1}}$, 于是应用

$$\cos \frac{at}{2^2} \cos \frac{at}{2^3} \cdots \cos \frac{at}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin \frac{at}{2}}{\sin \frac{at}{2^{n+1}}}$$

得 Y_n 的特征函数为

$$\begin{aligned} f_{Y_n}(t) &= \prod_{k=1}^n f_{X_k/2^k}(t) \\ &= \cos \frac{at}{2^2} \cos \frac{at}{2^3} \cdots \cos \frac{at}{2^{n+1}} \exp\left\{iat\left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}\right]\right\} \\ &= \frac{1}{2^n} \times \frac{\sin \frac{at}{2}}{\sin \frac{at}{2^{n+1}}} \exp\left\{\frac{iat}{2}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right\}. \end{aligned}$$

(6分)

应用 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{at}{2^{n+1}}}{\frac{at}{2^{n+1}}} = 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ 以及 $\exp\left(\frac{iat}{2}\right) - \exp\left(-\frac{iat}{2}\right) = 2i \sin \frac{at}{2}$ 得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{Y_n}(t) = \frac{2}{at} \exp\left(\frac{iat}{2}\right) \sin \frac{at}{2} = \frac{1}{iat} [\exp(iat) - 1].$$

由于区间 $[0, a]$ 上均匀分布随机变量的特征函数 $\varphi(t) = \frac{1}{iat} [\exp(iat) - 1]$, 所以 Y_n 的分布收敛于区间 $[0, a]$ 上的均匀分布. (10分)