

# 第六届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷

## (数学类, 2015年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五			总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

- 注意: 1. 前5大题是必答题, 再从 6-11 大题中任选两题, 题号要填如上面的表中.  
 2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.  
 3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.  
 4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 实二次型  $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$  的规范型 =  $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$ .

(2) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$  的和 =  $\frac{3}{4}$ .

(3) 计算第一型曲面积分的值:  $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) ds = 8\pi$ .

(4)  $A = (a_{ij})$  为  $n$  阶实对称矩阵 ( $n > 1$ ),  $\text{rank}(A) = n - 1$ ,  $A$  的每行元素之和均为 0. 设  $2, 3, \dots, n$  为  $A$  的全部非零特征值. 用  $A_{11}$  表示  $A$  的元素  $a_{11}$  所对应的代数余子式. 则有  $A_{11} = (n-1)!$ .

(4)解: 1) 秩  $A = n - 1 \Rightarrow$  秩  $A^* = 1$  且  $Ax = 0$  的解空间维数为 1.

$A$  的行和 = 0  $\Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow Ax = 0$  的一组基础解系为  $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2) 注意到  $AA^* = 0$ , 从而  $A^*$  的每一列均形如  $a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ . 又由于  $A$  为实对称矩阵,

故  $A^*$  也为实对称矩阵. 故  $A^* = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$ .

3)考虑特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 2) \cdots (\lambda - n).$$

其一次项系数为 $(-1)^{n-1}n!$ . 另一方面, 由 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 又知, 其一次项系数为 $(-1)^{n-1}(A_{11} + \cdots + A_{nn})$ . 结果  $a = (n - 1)!$ .

二、(本题 15 分)设空间中定点  $P$  到一定直线  $l$  的距离为  $p$ . 一族球面中的每个球面都过点  $P$ , 且截直线  $l$  得到的弦长都是定值  $a$ . 求该球面族的球心的轨迹.

**解:** 以  $l$  为  $z$  轴, 以过点  $P$  且垂直于  $z$  轴的直线为  $x$  轴来建立直角坐标系。可设  $P : (p, 0, 0)$ ,  $l$  的参数方程  $l : x = 0, y = 0, z = t$ .

设球面  $C$  的球心为 $(x_0, y_0, z_0)$ , 由于  $C$  过点  $P$ , 则

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (p - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

..... 4分

求  $l$  与  $C$  的交点: 将  $l$  的参数方程代入  $C$ ,

$$x_0^2 + y_0^2 + (t - z_0)^2 = (p - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

即

$$t^2 - 2z_0t + (2px_0 - p^2) = 0. \tag{1}$$

由此得到两个解为

$$t_{1,2} = z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - (2px_0 - p^2)}.$$

故弦长  $a = |t_1 - t_2| = 2\sqrt{z_0^2 - (2px_0 - p^2)}$ , 从而

$$z_0^2 - 2px_0 + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0. \tag{2}$$

..... 10分

反之, 如果球面  $C$  的球心满足(2), 如果  $C$  过点  $P$ , 此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta = 4z_0^2 - 4(2px_0 - p^2) = a^2 \geq 0,$$

方程有两个实根

$$t_{1,2} = z_0 \pm \frac{a}{2}.$$

从而  $C$  和  $l$  相交, 而且截出来弦长为  $a$ .

密封线 答题时不要超过此线

故所求的轨迹为

$$z^2 - 2px + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

..... 15分

三、证明题 (15分) 设  $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$ , 其中  $\mathbb{C}$  表复数域。试证明:  $\forall A \in \Gamma$ ,  $A$  的 Jordan 标准形  $J_A$  仍然属于  $\Gamma$ ; 进一步还存在可逆的矩阵  $P \in \Gamma$  使得  $P^{-1}AP = J_A$ .

证明: 对  $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$ , 其特征方程为

$$0 = |\lambda I - A| = \lambda^2 - 2\operatorname{Re}z_1\lambda + |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

$$\Delta = 4(\operatorname{Re}z_1)^2 - 4(|z_1|^2 + |z_2|^2) \leq 0.$$

..... 2分

情形1.  $\Delta = 0$ .

此时,  $z_2 = 0, z_1 = \operatorname{Re}z_1$ , 从而  $A = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}z_1 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}z_1 \end{pmatrix} = J_A \in \Gamma$ . 取  $P = I$  即有  $P^{-1}AP = J_A$ . ..... 8分

情形2.  $\Delta < 0$ .

此时  $A$  的特征值为

$$\lambda_1 = \operatorname{Re}z_1 + i\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (\operatorname{Re}z_1)^2}, \lambda_2 = \operatorname{Re}z_1 - i\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (\operatorname{Re}z_1)^2},$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

$$\text{从而 } J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

现取  $A$  关于  $\lambda_1$  的一个非0特征向量  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . 则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_1 x + \bar{z}_2 y = \bar{\lambda}_1 x \\ z_2 x - z_1 y = -\bar{\lambda}_1 y \end{cases}$$

直接检验知  $A \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \bar{\lambda}_1 \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$ , 因此  $\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$  为  $A$  关于  $\bar{\lambda}_1$  的一个非0特征

向量。令  $P = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$ , 则有  $P$  可逆, 且  $P \in \Gamma, P^{-1}AP = J_A$ . ..... 15分

四、(本题20分) 设

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求最大常数  $\alpha$  满足

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

证明:  $\alpha$  的最大值为  $\frac{1}{2}$ . ..... 2分

若  $\alpha > \frac{1}{2}$ , 取  $x_n = (n\pi)^{-1}, y_n = ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$ . 则

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|^\alpha} = 2^\alpha \pi^{\alpha-1} n^{2\alpha-1} (1 + \frac{1}{2n})^{\alpha-1} \rightarrow \infty.$$

..... 5分

下证  $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} < +\infty$ .

由于  $f(x)$  为偶函数, 不妨设  $0 \leq x < y$ . 令

$$z = \sup\{u \leq y | f(u) = f(x)\},$$

则  $z^{-1} \leq y^{-1} + 2\pi$ . ..... 10分

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(z) - f(y)| \\ &\leq \int_z^y |f'(t)| dt \leq |y - z|^{\frac{1}{2}} \left( \int_z^y f'(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x - y|^{\frac{1}{2}} \left( \int_z^y \left( \sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{s=t^{-1}}{=} |x - y|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{y^{-1}}^{z^{-1}} \left( \frac{\sin s}{s} - \cos s \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x - y|^{\frac{1}{2}} \left( \int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi} 4 ds \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8\pi} |x - y|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

..... 20分

五、(本题10分) 设  $a(t), f(t)$  为实连续函数,  $\forall t \in \mathbb{R}$  有  $f(t) > 0, a(t) \geq 1$ .  $\int_0^\infty f(t)dt = +\infty$ . 已知  $C^2$  函数  $x(t)$  满足

$$x''(t) + a(t)f(x(t)) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

求证:  $x(t)$  在  $[0, +\infty)$  有上界.

证明: 由

$$x''(t) \leq -a(t)f(x(t)) < 0,$$

$x(t)$ 是上凸的. ....2分

故  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t)$  存在或为  $-\infty$ .

若  $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ , 则  $x'(t) > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ . ....4分  
故

$$x'(t)f(x(t)) \leq a(t)x'(t)f(x(t)) \leq -x'(t)x''(t),$$

积分得

$$\int_0^t f(x(s)) dx(s) \leq \frac{x'(0)^2 - x'(t)^2}{2} \leq \frac{x'(0)^2}{2}.$$

令  $t \rightarrow \infty$  得

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{x'(0)^2}{2},$$

矛盾. ....10分

六、(本题10分) 设  $a, b$  是两个不同的复数. 求满足方程

$$(f'(z))^2 = (f(z) - a)(f(z) - b) \quad (1)$$

的非常数整函数  $f(z)$ .

**解** 由 (1) 可得

$$\left(f' - f + \frac{a+b}{2}\right) \left(f' + f - \frac{a+b}{2}\right) = -\left(\frac{a-b}{2}\right)^2. \quad (2)$$

.....2分

由此可知  $f' - f + \frac{a+b}{2}$  是无零点的整函数. 可设

$$f' - f + \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}e^\alpha, \quad (3)$$

其中  $\alpha$  是一个整函数. 由 (2) 得

$$f' + f - \frac{a+b}{2} = -\frac{a-b}{2}e^{-\alpha}. \quad (4)$$

由 (3), (4) 得

$$f = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^\alpha - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}, \quad (5)$$

.....4分

$$f' = \frac{a-b}{4}e^\alpha - \frac{a-b}{4}e^{-\alpha}. \quad (6)$$

对 (5) 求导得

$$f' = -\frac{a-b}{4}\alpha'e^\alpha + \frac{a-b}{4}\alpha'e^{-\alpha}. \quad (7)$$

由 (6), (7) 可得

$$(\alpha' + 1)(e^\alpha - 1)(e^\alpha + 1) = 0,$$

..... 8分

因此  $e^\alpha - 1 = 0$  或者  $e^\alpha + 1 = 0$  或者  $\alpha' + 1 = 0$ .

若  $e^\alpha - 1 = 0$ , 则由 (5) 得到  $f = b$  是一个常数. 同理, 若  $e^\alpha + 1 = 0$ , 则  $f = a$  也是一个常数. 若  $\alpha' + 1 = 0$ , 则  $\alpha(z) = -z + c$ , 其中  $c$  是任意常数. 再由 (5) 可得

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{4}e^{-z+c} - \frac{a-b}{4}e^{z-c} \\ &= \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} \operatorname{ch}(z-c) \end{aligned}$$

..... 10分

七、(本题10分) 设  $f(x)$  是  $\mathbb{R}^1$  上的 Lipschitz 函数, Lipschitz 常数为  $K$ , 则对任意的可测集  $E \subset \mathbb{R}^1$ , 均有  $m(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ .

**证明:** (方法1) 1) 在题设的条件下, 对任何可测集  $E$ , 有  $m^*(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ .

(1) 若  $E$  为区间, 由  $f$  的连续性知:  $f(E)$  是区间. 又  $f(x)$  是 Lipschitz 函数, 有  $|f(E)| \leq K|E|$ , 即  $m(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ . ..... 1分

(2) 若  $E$  为开集, 由开集的构造知:  $E = \bigcup_{n \geq 1} (\alpha_n, \beta_n)$ , 其中  $\{(\alpha_n, \beta_n)\}$  互不相交.

由(1)得:

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) &= m^*(f(\bigcup_{n \geq 1} (\alpha_n, \beta_n))) = m^*(\bigcup_{n \geq 1} f(\alpha_n, \beta_n)) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} m^* f((\alpha_n, \beta_n)) \leq K \sum_{n \geq 1} m((\alpha_n, \beta_n)) = K \cdot m(\bigcup_{n \geq 1} (\alpha_n, \beta_n)) = K \cdot m(E). \end{aligned}$$

..... 3分

(3) 若  $E$  为可测, 则  $\forall \epsilon > 0, \exists$  开集  $G \supset E$ , 使得  $m(G - E) < \epsilon$ .

密封线 答题时不要超过此线

由(2)及  $f(G) \supset f(E)$  知:

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) &\leq m^*(f(G)) \leq K \cdot m(G) = K \cdot m(E \cup (G - E)) \\ &\leq K \cdot m(E) + K \cdot m(G - E) \\ &< K \cdot m(E) + K \cdot \epsilon. \end{aligned}$$

由  $\epsilon$  的任意性知:  $m^*(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ . .....6分

2) 在题设条件下, 若  $E$  可测, 则  $f(E)$  可测.

$E$  可测  $\Rightarrow \exists F_\sigma$ -型集  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ,  $F_n$  闭集,  $A \subset E$ ,  $m(E - A) = 0$ .

又  $f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ , 由  $f$  的连续性知:  $f(F_n)$  闭. ....8分

那么  $f(A)$  是  $F_\sigma$ -型集且  $f(A) \subset f(E)$ .

由1)知:  $m^*(f(E - A)) \leq K \cdot m(E - A) = 0$ , 即  $m(f(E - A)) = 0$ .

而  $f(E - A) \supset f(E) - f(A)$ , 从而  $m(f(E) - f(A)) = 0$ , 故  $f(E)$  可测.

综合1) 2)可得: 对任何可测集  $E$ , 有  $f(E)$  可测且  $m(f(E)) = m^*(f(E)) \leq K \cdot m(E)$ .  
.....10分

(方法2) i) 若  $f(x)$  为  $\mathbb{R}^1$  上的绝对连续函数,  $A \subset \mathbb{R}^1$ ,  $m(A) = 0$ , 则  $m(f(A)) = 0$ .

$f \in AC(\mathbb{R}^1) \Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ , 对任意至多可数个互不相交的开区间  $\{(a_i, b_i)\}_{i \geq 1}$ , 当  $\sum_{i \geq 1} (b_i - a_i) < \delta$  时, 有  $\sum_{i \geq 1} (f(b_i) - f(a_i)) < \epsilon$ .

由  $m(A) = 0$ , 对上  $\delta > 0, \exists$  开集  $G \supset A, m(G) < \delta$ .

令  $G = \bigcup_{k \geq 1} (c_k, d_k)$ ,  $m_k = \min_{x \in [c_k, d_k]} f(x) = f(\alpha_k), M_k = \max_{x \in [c_k, d_k]} f(x) = f(\beta_k)$ .

$\therefore \sum_{k \geq 1} (\beta_k - \alpha_k) \leq \sum_{k \geq 1} (d_k - c_k) < \delta, \therefore \sum_{k \geq 1} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \epsilon$ ,

而  $m^* f(G) = m^* \left( \bigcup_{k \geq 1} f((c_k, d_k)) \right) \leq \sum_{k \geq 1} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| < \epsilon$ ,

又  $\therefore f(G) \supset f(A), \therefore m^* f(A) < \epsilon$ , 由  $\epsilon$  的任意性知  $m^* f(A) = 0$ . ....4分

ii) 若  $f(x)$  为  $\mathbb{R}^1$  上的绝对连续函数,  $A$  可测, 则  $f(A)$  可测.

$A$  可测  $\Rightarrow \exists F_\sigma$ -型集  $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ,  $F_n$  闭,  $B \subset A, m(A - B) = 0$

$\Rightarrow f(B) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(F_n)$ , 由  $f$  的连续性知  $f(F_n)$  闭,  $f(B)$  是  $F_\sigma$ -型集,  $f(B) \subset f(A)$ .

由 i) 知:  $m f(A - B) = 0$ .

又  $\therefore f(A - B) \supset f(A) - f(B), \therefore m(f(A) - f(B)) = 0$ , 故  $f(A)$  可测. ....6分

iii) 不妨设  $E$  测度有限.  $f$  是  $\mathbb{R}^1$  上的 Lipschitz 函数  $\Rightarrow f(x)$  为  $\mathbb{R}^1$  上的绝对连续函数  $\Rightarrow f'(x)$  在  $\mathbb{R}^1$  上几乎处处存在且  $|f'(x)| \leq K, f'$  在  $E$  上是  $L$ -可积, 即

$\exists Z \subset \mathbb{R}^1, m(Z) = 0, f'(x)$  存在且  $|f'(x)| \leq K, \forall x \in E - Z$ . 由 i) 知:  $mf(Z) = 0$ . 于是

$$\begin{aligned} m(f(E)) &\leq m(f(E - Z)) + m(f(Z)) = m(f(E - Z)) \\ &\leq \int_{E-Z} |f'(x)| dm \leq \int_{E-Z} K dm \leq K \cdot m(E). \end{aligned}$$

..... 10分

注: 上式的第二个不等式的证明.

若  $f(x)$  在  $\mathbb{R}^1$  上绝对连续,  $f'$  在  $A$  上存在积分, 则  $mf(A) \leq \int_A |f'| dm$ .

证明: (1) 对任何区间  $I, mf(I) \leq \int_I |f'| dm$ .

令  $\max_{x \in \bar{I}} f(x) = f(b), \min_{x \in \bar{I}} f(x) = f(a), a, b \in \bar{I}$ ,

则  $mf(I) = f(b) - f(a) = |\int_{(a,b)} f' dm| \leq \int_{(a,b)} |f'| dm \leq \int_I |f'| dm$ .

(2)  $f'$  可积  $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall e \subset E$ , 若  $me < \delta$ , 有  $\int_e |f'| dm < \varepsilon$ .

$A$  可测  $\Rightarrow$  对上  $\delta > 0, \exists$  开集  $G \supset A, m(G - A) < \delta$ . 于是  $\int_{G-A} |f'| dm < \varepsilon$ .

令  $G = \bigcup_{k \geq 1} (\alpha_k, \beta_k)$ , 则

$$\begin{aligned} m(f(A)) &\leq m(f(G)) \leq \sum_{k \geq 1} m(f((\alpha_k, \beta_k))) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \int_{(\alpha_k, \beta_k)} |f'| dm = \int_G |f'| dm = \int_G |f'| dm - \varepsilon + \varepsilon \\ &\leq \int_G |f'| dm - \int_{G-A} |f'| dm + \varepsilon = \int_A |f'| dm + \varepsilon \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  的任意性得:  $mf(A) \leq \int_A |f'| dm$ .

八、(本题10分) 设三维空间的曲面  $S$  满足:

(1)  $P_0 = (0, 0, -1) \in S$ ;

(2) 对任意  $P \in S, |\vec{OP}| \leq 1$ , 其中  $O$  是原点.

证明: 曲面  $S$  在  $P_0$  的 Gauss 曲率  $K(P_0) \geq 1$ .

证明: 在  $P_0$  附近取曲率线坐标  $(u, v)$ , 曲面的参数方程设为  $\mathbf{r}(u, v)$ . 不妨设  $\mathbf{r}(0, 0) = P_0$ . 用  $E, F, G; L, M, N$  分别表示曲面  $\mathbf{r}(u, v)$  的第一基本型、第二基本型系数, 则  $F = M = 0$ . ..... 3分

令  $f(u, v) = \langle \mathbf{r}(u, v), \mathbf{r}(u, v) \rangle$ , 则  $f(u, v)$  在  $(0, 0)$  点取极大值1. 于是

$$f_u(0, 0) = 2\langle \mathbf{r}_u(0, 0), \mathbf{r}(0, 0) \rangle = 0, \quad f_v(0, 0) = 2\langle \mathbf{r}_v(0, 0), \mathbf{r}(0, 0) \rangle = 0.$$

从而曲面 $S$ 在 $P_0$ 的法向 $\mathbf{n}(0, 0) = \mathbf{r}(0, 0)$ 。 ..... 6分

又由于

$$f_{uu}(0, 0) = 2(E(0, 0) + L(0, 0)), \quad f_{uv}(0, 0) = 0, \quad f_{vv}(0, 0) = 2(G(0, 0) + N(0, 0))$$

根据 $f(u, v)$ 在 $(0, 0)$ 取极大值,  $f_{uu}(0) \leq 0, f_{vv}(0, 0) \leq 0$ 。于是,

$$0 < E(0, 0) \leq -L(0, 0), \quad 0 < G(0, 0) \leq -N(0, 0)$$

从而 $S$ 在 $P_0$ 的Gauss曲率

$$K(P_0) = \frac{L(0, 0)N(0, 0)}{E(0, 0)G(0, 0)} \geq 1.$$

..... 10分

九、(本题10分) 考虑求解线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的如下迭代格式

$$(\alpha D - C)\mathbf{x}^{(k+1)} = ((\alpha - 1)D + C^T)\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{b},$$

其中 $D$ 为实对称正定方阵,  $C$ 是满足 $C + C^T = D - A$ 的实方阵,  $\alpha$ 为实数。若 $A$ 是实对称正定方阵, 且 $\alpha D - C$ 可逆,  $\alpha > 1/2$ 。证明: 上述迭代格式对任何初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$ 收敛。

证明: 令

$$G = (\alpha D - C)^{-1}((\alpha - 1)D + C^T),$$

$\lambda$ 为 $G$ 的特征值,  $\mathbf{x}$ 是对应的特征向量,  $\mathbf{y} = (I - G)\mathbf{x}$ 。则

$$\begin{aligned} (\alpha D - C)\mathbf{y} &= (\alpha D - C)\mathbf{x} - ((\alpha - 1)D + C^T)\mathbf{x} \\ &= (D - C - C^T)\mathbf{x} = A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\alpha D - D + C^T)\mathbf{y} &= (\alpha D - C - A)\mathbf{y} = \\ (\alpha D - C - A)\mathbf{x} - (\alpha D - C - A)G\mathbf{x} &= \\ (\alpha D - C - A)\mathbf{x} - ((\alpha - 1)D + C^T)\mathbf{x} + AG\mathbf{x} &= \\ = AG\mathbf{x} = \lambda A\mathbf{x}. \end{aligned}$$

..... 5分

以上两个方程两遍分别与 $\mathbf{y}$ 做内积得

$$\alpha \langle D\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle - \langle C\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle.$$

$$\alpha \langle \mathbf{y}, D\mathbf{y} \rangle - \langle \mathbf{y}, D\mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, C^T \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \lambda A\mathbf{x} \rangle.$$

..... 8分

以上两式相加得

$$\begin{aligned} (2\alpha - 1)\langle D\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle &= \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \lambda A\mathbf{x} \rangle \\ &= (1 - \bar{\lambda})\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \bar{\lambda}(1 - \lambda)\langle \mathbf{x}, A\mathbf{x} \rangle = (1 - |\lambda|^2)\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle. \end{aligned}$$

由于  $\alpha > 1/2$ ,  $\langle D\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle \geq 0$ ,  $\langle A\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ , 则必有  $|\lambda| \leq 1$ , 若  $|\lambda| = 1$ , 则  $\mathbf{y} = 0$ , 从而  $A\mathbf{x} = (\alpha D - C)\mathbf{y} = 0$ , 进而  $\mathbf{x} = 0$ , 矛盾. 因此  $|\lambda| < 1$ , 即  $\rho(G) < 1$ . 故迭代收敛.

..... 10分

十、(本题10分) 设  $R$  为  $[0, 1]$  上的连续函数环, 其加法为普通的函数加法, 乘法为普通的函数乘法.  $I$  为  $R$  的一个极大左理想. 证明:  $\forall f, g \in I$ ,  $f$  与  $g$  在  $[0, 1]$  上必有公共的零点.

**证明:** 若  $f, g$  在  $[0, 1]$  上无公共零点, 则连续函数  $|f|^2 + |g|^2$  在  $[0, 1]$  上恒大于 0. 结果  $\frac{1}{|f|^2 + |g|^2} \in R$ . .....

5分

注意到  $I$  为左理想,  $f \in I, \bar{f} \in R$ , 从而  $|f|^2 = \bar{f}f \in I$ , 同样  $|g|^2 \in I$ , 故  $|f|^2 + |g|^2 \in I$ , 进而

$$\frac{1}{|f|^2 + |g|^2} (|f|^2 + |g|^2) = 1 \in R,$$

矛盾于  $I$  为  $R$  的一个极大左理想. ....

10分

十一、(本题10分) 设在国际市场上对我国某种出口商品每年的需求量  $X$  (单位: 吨) 是随机变量,  $X$  服从  $[100, 200]$  上的均匀分布. 每出售这种商品一吨, 可以为国家挣得外汇 3 万元; 若销售不出而囤积于仓库, 则每吨需要花费保养费用 1 万元. 求: 应组织多少货源, 才能使国家的收益最大?

**解** 设需要组织  $t$  吨货源预备出口, 则国家收益  $Y$  (单位: 万元) 是随机变量  $X$  的函数  $Y = g(X)$ , 表达式为

$$g(X) = \begin{cases} 3t, & \text{当 } X \geq t \text{ 时,} \\ 3X - (t - X), & \text{当 } X < t \text{ 时.} \end{cases}$$

显然,  $100 \leq t \leq 200$ . 由已知条件, 知  $X$  的概率密度函为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100}, & \text{当 } x \in [100, 200] \text{ 时,} \\ 0, & \text{当 } x \notin [100, 200] \text{ 时.} \end{cases}$$



密封线 答题时不要超过此线

..... 4分

由于Y是随机变量, 因此, 题中所指的国家收益最大可理解为均值最大, 因而问题转化为求Y的均值, 即求 $E[g(X)]$ 的均值. 简单计算可得

$$\begin{aligned}
E[g(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx = \frac{1}{100} \int_{100}^{200} g(x)dx \\
&= \frac{1}{100} \int_{100}^t [3x - (t - x)]dx + \frac{1}{100} \int_t^{200} 3tdx \\
&= \frac{1}{50} [-t^2 + 350t - 10000].
\end{aligned}$$

..... 8分

记 $h(t) = -t^2 + 350t - 10000$ . 令 $h'(t) = -2t + 350 = 0$ , 可得 $t = 175$ . 而 $h''(t) = -2 < 0$ . 因此, 当 $t = 175$ 时函数 $h(t)$ 达到最大值, 亦即 $E[g(X)]$ 达到最大. 故应组织175吨这种商品, 能使国家获得的收益均值最大. .... 10分