

第六届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷

(数学类, 2015年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型 = $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和 = $\frac{3}{4}$.

(3) 计算第一型曲面积分的值: $I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) \, ds = \underline{8\pi}$.

(4) $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 ($n > 1$), $\text{rank}(A) = n - 1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2, 3, \dots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式. 则有 $A_{11} = \underline{(n-1)!}$.

(4) 解: 1) 秩 $A = n - 1 \Rightarrow$ 秩 $A^* = 1$ 且 $Ax = 0$ 的解空间维数为 1.

A 的行和 = 0 $\Rightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow Ax = 0$ 的一组基础解系为 $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) 注意到 $AA^* = 0$, 从而 A^* 的每一列均形如 $a \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. 又由于 A 为实对称矩阵,

故 A^* 也为实对称矩阵. 故 $A^* = \begin{pmatrix} a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a \end{pmatrix}$.

3) 考虑特征多项式

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda(\lambda - 2) \cdots (\lambda - n).$$

其一次项系数为 $(-1)^{n-1}n!$. 另一方面, 由 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 又知, 其一次项系数为 $(-1)^{n-1}(A_{11} + \cdots + A_{nn})$. 结果 $a = (n-1)!$.

二、(本题 15 分) 设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p . 一族球面中的每个球面都过点 P , 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a . 求该球面族的球心的轨迹.

解: 以 l 为 z 轴, 以过点 P 且垂直于 z 轴的直线为 x 轴来建立直角坐标系. 可设 $P : (p, 0, 0)$, l 的参数方程 $l : x = 0, y = 0, z = t$.

设球面 C 的球心为 (x_0, y_0, z_0) , 由于 C 过点 P , 则

$$C : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = (p - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

..... 4分

求 l 与 C 的交点: 将 l 的参数方程代入 C ,

$$x_0^2 + y_0^2 + (t - z_0)^2 = (p - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2.$$

即

$$t^2 - 2z_0t + (2px_0 - p^2) = 0. \quad (1)$$

由此得到两个解为

$$t_{1,2} = z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - (2px_0 - p^2)}.$$

故弦长 $a = |t_1 - t_2| = 2\sqrt{z_0^2 - (2px_0 - p^2)}$, 从而

$$z_0^2 - 2px_0 + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0. \quad (2)$$

..... 10分

反之, 如果球面 C 的球心满足(2), 如果 C 过点 P , 此时二次方程(1)的判别式

$$\Delta = 4z_0^2 - 4(2px_0 - p^2) = a^2 \geq 0,$$

方程有两个实根

$$t_{1,2} = z_0 \pm \frac{a}{2}.$$

从而 C 和 l 相交, 而且截出来弦长为 a .

故所求的轨迹为

$$z^2 - 2px + p^2 - \frac{a^2}{4} = 0.$$

..... 15分

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

三、证明题 (15分) 设 $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$, 其中 \mathbb{C} 表复数域。试证明: $\forall A \in \Gamma$, A 的 Jordan 标准形 J_A 仍然属于 Γ ; 进一步还存在可逆的矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

证明: 对 $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix}$, 其特征方程为

$$0 = |\lambda I - A| = \lambda^2 - 2Rez_1\lambda + |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

$$\Delta = 4(Rez_1)^2 - 4(|z_1|^2 + |z_2|^2) \leqslant 0.$$

..... 2分

情形1. $\Delta = 0$.

此时, $z_2 = 0, z_1 = Rez_1$, 从而 $A = \begin{pmatrix} Rez_1 & 0 \\ 0 & Rez_1 \end{pmatrix} = J_A \in \Gamma$. 取 $P = I$ 即有 $P^{-1}AP = J_A$ 8分

情形2. $\Delta < 0$.此时 A 的特征值为

$$\lambda_1 = Rez_1 + i\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (Rez_1)^2}, \lambda_2 = Rez_1 - i\sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2 - (Rez_1)^2},$$

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

从而 $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \Gamma$.

现取 A 关于 λ_1 的一个非0特征向量 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. 则有

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}_1x + \bar{z}_2y = \overline{\lambda_1}x \\ z_2\bar{x} - z_1\bar{y} = -\overline{\lambda_1}\bar{y} \end{cases}$$

直接检验知 $A \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix} = \overline{\lambda_1} \begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$, 因此 $\begin{pmatrix} -\bar{y} \\ \bar{x} \end{pmatrix}$ 为 A 关于 $\overline{\lambda_1}$ 的一个非0特征向量。令 $P = \begin{pmatrix} x & -\bar{y} \\ y & \bar{x} \end{pmatrix}$, 则有 P 可逆, 且 $P \in \Gamma, P^{-1}AP = J_A$ 15分

四、(本题20分) 设

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求最大常数 α 满足

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty.$$

证明: α 的最大值为 $\frac{1}{2}$ 2分

若 $\alpha > \frac{1}{2}$, 取 $x_n = (n\pi)^{-1}, y_n = ((n + \frac{1}{2})\pi)^{-1}$. 则

$$\frac{|f(x_n) - f(y_n)|}{|x_n - y_n|^\alpha} = 2^\alpha \pi^{\alpha-1} n^{2\alpha-1} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{\alpha-1} \rightarrow \infty.$$

下证 $\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\frac{1}{2}}} < +\infty$ 5分

由于 $f(x)$ 为偶函数, 不妨设 $0 \leq x < y$. 令

$$z = \sup\{u \leq y | f(u) = f(x)\},$$

则 $z^{-1} \leq y^{-1} + 2\pi$ 10分

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(z) - f(y)| \\ &\leq \int_z^y |f'(t)| dt \leq |y - z|^{\frac{1}{2}} \left(\int_z^y f'(t)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x - y|^{\frac{1}{2}} \left(\int_z^y \left(\sin \frac{1}{t} - \frac{1}{t} \cos \frac{1}{t}\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{s=t^{-1}}{=} |x - y|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{y^{-1}}^{z^{-1}} \left(\frac{\sin s}{s} - \cos s\right)^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |x - y|^{\frac{1}{2}} \left(\int_{y^{-1}}^{y^{-1}+2\pi} 4 ds\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8\pi} |x - y|^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

..... 20分

五、(本题15分) 设 $a(t), f(t)$ 为实连续函数, $\forall t \in \mathbb{R}$ 有 $f(t) > 0, a(t) \geq 1$. $\int_0^\infty f(t)dt = +\infty$. 已知 $x(t)$ 满足

$$x''(t) + a(t)f(x(t)) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有上界.

证明: 由

$$x''(t) \leq -a(t)f(x(t)) < 0,$$

$x(t)$ 是上凸的. 3分

故 $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t)$ 存在或为 $-\infty$.

若 $\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$, 则 $x'(t) > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ 6分
故

$$x'(t)f(x(t)) \leq a(t)x'(t)f(x(t)) \leq -x'(t)x''(t),$$

积分得

$$\int_0^t f(x(s)) dx(s) \leq \frac{x'(0)^2 - x'(t)^2}{2} \leq \frac{x'(0)^2}{2}.$$

令 $t \rightarrow \infty$ 得

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \leq \frac{x'(0)^2}{2},$$

矛盾。 15分

六、(本题15分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可导, 且 $f(0) = f(1) = 0$. 求证:

$$\left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx,$$

等号当且仅当 $f(x) = A(x - x^3)$ 时成立, 其中 A 是常数.

证明: 分部积分可得

$$\int_0^1 xf(x) dx = \frac{1}{2}x^2 f(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}x^2 f'(x) dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 x^2 f'(x) dx.$$

..... 5分

因此根据 Newton-Leibniz 公式, 得

$$6 \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 (1 - 3x^2) f'(x) dx.$$

..... 8分

再根据 Cauchy 积分不等式, 得

$$\begin{aligned} 36 \left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 &\leq \int_0^1 (1 - 3x^2)^2 dx \int_0^1 (f'(x))^2 dx \\ &= \frac{4}{5} \int_0^1 (f'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

..... 12分

由此即得

$$\left(\int_0^1 xf(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx.$$

等号成立当且仅当 $f'(x) = A(1 - 3x^2)$. 积分并由 $f(0) = f(1) = 0$ 即得 $f(x) = Ax(1 - x)(1 + x)$ 15分