

第六届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷 (数学类, 2015年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

| | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
| 满分 | 20 | 15 | 15 | 20 | 15 | 15 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

一、(本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

(1) 实二次型 $2x_1x_2 - x_1x_3 + 5x_2x_3$ 的规范型为

-----.

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 的和为 -----.

(3) 计算第一型曲面积分的值:

$$I = \iint_{x^2+y^2+z^2=1} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS = \text{-----} .$$

(4) $A = (a_{ij})$ 为 n 阶实对称矩阵 ($n > 1$), $\text{rank}(A) = n - 1$, A 的每行元素之和均为 0. 设 $2, 3, \dots, n$ 为 A 的全部非零特征值. 用 A_{11} 表示 A 的元素 a_{11} 所对应的代数余子式. 则有 $A_{11} = \text{-----}$.

专业: _____

考生座位号: _____

所在院校: _____

准考证号: _____

姓名: _____

密封线 答题时不要超过此线

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

二、(本题 15 分)设空间中定点 P 到一定直线 l 的距离为 p . 一族球面中的每个球面都过点 P , 且截直线 l 得到的弦长都是定值 a . 求该球面族的球心的轨迹.

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

----- ○ ----- 密封线 答题时不要超过此线 ○ ----- ○ -----

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

三、(本题15分) 设 $\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\bar{z}_2 & \bar{z}_1 \end{pmatrix} \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C} \right\}$,
其中 \mathbb{C} 表示复数域. 试证明: $\forall A \in \Gamma$, A 的Jordan标准形 J_A 仍然属于 Γ ; 进一步还存在可逆矩阵 $P \in \Gamma$ 使得 $P^{-1}AP = J_A$.

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

四、（本题20分）设

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

求满足不等式

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} < +\infty$$

的最大常数 α .

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考生座位号: _____ 专业: _____

○

密封线 答题时不要超过此线 ○

○

○

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

五、(本题15分) 设 $a(t), f(t)$ 为实连续函数, $\forall t \in \mathbb{R}$ 有 $f(t) > 0, a(t) \geq 1$. $\int_0^\infty f(t)dt = +\infty$. 已知 C^2 函数 $x(t)$ 满足

$$x''(t) + a(t)f(x(t)) \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

求证: $x(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 有上界.

| | |
|-----|--|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

六、（本题15分）设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续可导，且 $f(0) = f(1) = 0$. 求证：

$$\left(\int_0^1 x f(x) dx \right)^2 \leq \frac{1}{45} \int_0^1 (f'(x))^2 dx,$$

等号当且仅当 $f(x) = A(x - x^3)$ 时成立，其中 A 是常数.