

## 第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（数学类，2011年3月）

考试形式：闭卷 考试时间：150 分钟 满分：100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

- 注意：1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其他纸上一律无效。  
 2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记。  
 3、如当题空白不够，可写在当页的背面，并标明题号。

得 分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 求出过原点且和椭球面  $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 1$  的交线为一个圆周的所有平面.

得 分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设  $0 < f(x) < 1$ , 无穷积分  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  和  $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$  都收敛. 求证:  $\int_0^{+\infty} xf(x)dx > \frac{1}{2} \left( \int_0^{+\infty} f(x)dx \right)^2$ .

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设  $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$  收敛,  $t_n = a_{n+1} + 2a_{n+2} + \cdots + ka_{n+k} + \cdots$ .

证明:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$ .

得 分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 设  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , 定义线性变换  $\sigma_A: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ ,  $\sigma_A(X) = AX - XA$ . 证明: 当  $A$  可对角化时,  $\sigma_A$  也可对角化. 这里  $M_n(\mathbb{C})$  是复数域  $\mathbb{C}$  上  $n$  阶方阵组成的线性空间.

得 分	
评阅人	

五、(本题 20 分) 设连续函数  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  满足  $\sup_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < +\infty$ . 证明: 存在实常数  $a$  满足

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - ax| < +\infty.$$

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设  $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  是非零线性映射, 满足

$$\varphi(XY) = \varphi(YX), \quad \forall X, Y \in M_n(\mathbb{R}),$$

这里  $M_n(\mathbb{R})$  是实数域  $\mathbb{R}$  上

$n$  阶方阵组成的线性空间. 在  $M_n(\mathbb{R})$  上定义双线性型  $(-, -): M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

如下:  $(X, Y) = \varphi(XY)$ .

(1) 证明  $(-, -)$  是非退化的, 即若  $(X, Y) = 0, \forall Y \in M_n(\mathbb{R})$ , 则  $X = 0$ .

(2) 设  $A_1, \dots, A_{n^2}$  是  $M_n(\mathbb{R})$  的一组基,  $B_1, \dots, B_{n^2}$  是相应的对偶基. 即

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \\ 1, & \text{当 } i = j \end{cases}. \text{ 证明 } \sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i \text{ 是数量矩阵.}$$