

第十二届全国大学生数学竞赛初赛试卷 (数学类 A 卷, 2020 年 11 月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设 $N(0, 0, 1)$ 是球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的北极点. $A(a_1, a_2, 0), B(b_1, b_2, 0), C(c_1, c_2, 0)$ 为 xOy 平面上不同的三点. 设连接 N 与 A, B, C 的三直线依次交球面 S 于点 A_1, B_1 与 C_1 .

- (1) 求连接 N 与 A 两点的直线方程.
- (2) 求点 A_1, B_1 与 C_1 的坐标.
- (3) 给定点 $A(1, -1, 0), B(-1, 1, 0), C(1, 1, 0)$, 求四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积.

解.

- (1) 过 N, A 两点的直线方程为

$$\frac{x}{a_1} = \frac{y}{a_2} = \frac{z-1}{-1}.$$

..... (3 分)

- (2) 由此可得直线的参数方程

$$x = a_1 t, \quad y = a_2 t, \quad z = 1 - t,$$

代入球面方程可得

$$(a_1 t)^2 + (a_2 t)^2 + (1 - t)^2 = 1.$$

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 考场号: _____ 座位号: _____ 专业: _____

密封线 答题时不要超过此线

由此解得

$$t = \frac{2}{a_1^2 + a_2^2 + 1} \quad \text{或} \quad t = 0.$$

从而得 A_1 的坐标为

$$\left(\frac{2a_1}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{2a_2}{a_1^2 + a_2^2 + 1}, \frac{a_1^2 + a_2^2 - 1}{a_1^2 + a_2^2 + 1} \right).$$

同理可得, A_2 的坐标为

$$\left(\frac{2b_1}{b_1^2 + b_2^2 + 1}, \frac{2b_2}{b_1^2 + b_2^2 + 1}, \frac{b_1^2 + b_2^2 - 1}{b_1^2 + b_2^2 + 1} \right).$$

以及 A_3 的坐标为

$$\left(\frac{2c_1}{c_1^2 + c_2^2 + 1}, \frac{2c_2}{c_1^2 + c_2^2 + 1}, \frac{c_1^2 + c_2^2 - 1}{c_1^2 + c_2^2 + 1} \right).$$

..... (9 分)

(3) 当 $A(1, -1, 0)$, $B(-1, 1, 0)$ 以及 $C(1, 1, 0)$ 给定时, 经计算可得

$$A_1 = \left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad B_1 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right), \quad C_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

所以, 利用向量的混合积可以把四面体 $NA_1B_1C_1$ 的体积表示为

$$V = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1})|.$$

混合积 $(\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1})$ 表示成矩阵的行列式

$$(\overrightarrow{NA_1}, \overrightarrow{NB_1}, \overrightarrow{NC_1}) = \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{32}{27}.$$

于是得到

$$V = \frac{1}{6} \times \frac{32}{27} = \frac{16}{81}.$$

..... (15 分)

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \dots + n^{2020})}$.

解. 我们有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2021}} (1^{2020} + 2^{2020} + \dots + n^{2020}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\left(\frac{1}{n}\right)^{2020} + \left(\frac{2}{n}\right)^{2020} + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^{2020} \right) \\ &= \int_0^1 x^{2020} dx = \frac{1}{2021}. \end{aligned}$$

或用 Stolz 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{2021}} (1^{2020} + 2^{2020} + \dots + n^{2020}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2020}}{n^{2021} - (n-1)^{2021}} = \frac{1}{2021}.$$

因此, $\ln \frac{1^{2020} + 2^{2020} + \dots + n^{2020}}{n^{2021}}$ 有界.

.....(8 分)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\ln(1^{2020} + 2^{2020} + \dots + n^{2020})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2021 \ln n + \ln \frac{1^{2020} + 2^{2020} + \dots + n^{2020}}{n^{2021}}} \\ &= \frac{1}{2021}. \end{aligned}$$

.....(15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 A, B 均为 2020 阶正交矩阵, 齐次线性方程组 $Ax = Bx (x \in \mathbb{R}^{2020})$ 的解空间维数为 3. 问: 矩阵 A, B 是否可能相似? 证明你的结论.

解. A, B 一定不相似.

..... (2 分)

证明如下.

令 $C = AB^{-1}$. 由于 A, B 均为正交矩阵, 故 C 也是正交矩阵. C 视为复矩阵是酉矩阵, 故可以复对角化. 即存在复可逆矩阵 T 和复对角矩阵 D , 使得 $T^{-1}CT = D$, 其中 D 的主对角线上的元素即为 C 的复特征值.

..... (7 分)

齐次线性方程组 $Ax = Bx$ 的解空间维数为 3, 则 $\text{rank}(A - B) = 2017$. 进而

$$\begin{aligned} \text{rank}(D - I) &= \text{rank}(T^{-1}(C - I)T) = \text{rank}(C - I) \\ &= \text{rank}((A - B)B^{-1}) = \text{rank}(A - B) = 2017. \end{aligned}$$

这表明对角矩阵 D 的主对角线上恰有 3 个元素是 1. 即 C 有三重特征值 1. 由于正交矩阵的实特征值为 1 或 -1 , 而非实数特征值共轭成对出现, 共有偶数个. 又 C 共有 2020 个特征值 (计重数), 故 C 有特征值 -1 , 且重数为奇数.

..... (12 分)

C 的行列式是其所有特征值 (计重数) 之积. 注意到 C 的非实数特征值共轭成对出现, 它们的乘积为正数. 故 $\det C < 0$. 特别地, $\det(AB^{-1}) = \det C \neq 1$. 即 $\det A \neq \det B$. 从而 A, B 不相似.

..... (15 分)

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 称非常值一元 n 次多项式(合并同类项后)的 $n - 1$ 次项(可能为 0)为第二项. 求所有 2020 次复系数首一多项式 $f(x)$, 满足对 $f(x)$ 的每个复根 x_k , 都存在非常值复系数首一多项式 $g_k(x)$ 和 $h_k(x)$, 使得

$f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 且 $g_k(x)$ 与 $h_k(x)$ 的第二项系数相等.

解. 显然 $f(x) = x^{2020}$ 满足题意.

..... (5 分)

以下证明这是唯一解. 设 $f(x)$ 的 2020 个复根为 $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$. 对每个 k ($1 \leq k \leq 2020$), 由题设条件可设 $f(x) = (x - x_k)g_k(x)h_k(x)$, 其中 $g_k(x), h_k(x)$ 分别为 m_k 次和 n_k 次非常值首一多项式, 第二项系数均为 a_k . 设 $g_k(x)$ 的所有复根为 $y_{k,1}, y_{k,2}, \dots, y_{k,m_k}$, $h_k(x)$ 的所有复根为 $z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,n_k}$. 这些根恰为所有 x_j ($j \neq k$). 由韦达定理,

$$a_k = (-1)^{m_k-1}(y_{k,1} + y_{k,2} + \dots + y_{k,m_k}) = (-1)^{n_k-1}(z_{k,1} + z_{k,2} + \dots + z_{k,n_k}).$$

..... (12 分)

对每个 k , 将上式改写为

$$\sum_{j \neq k} \varepsilon_{kj} x_j = 0,$$

其中 $\varepsilon_{kj} = 1$ 或 -1 .

这样, 我们得到了关于 $x_1, x_2, \dots, x_{2020}$ 的齐次线性方程组, 其系数矩阵 A 为 2020 阶方阵, 主对角线上元素为 0. 主对角线外元素为 1 或 -1 . 令 B 为 2020 阶方阵, 其主对角线上元素为 0, 主对角线外元素为 1, 则容易计算出 B 的行列式为 $\det B = -2019$. 由行列式定义, $\det A$ 与 $\det B$ 的奇偶性相同, 故 $\det A \neq 0$.

..... (18 分)

从而上述齐次线性方程组只有零解, 即 $x_1 = x_2 = \dots = x_{2020} = 0$. 这便证明了 $f(x) = x^{2020}$.

..... (20 分)

注: 上面证明 $\det A \neq 0$ 也可以如下进行:

显然, $\det A \equiv \det B \pmod{2}$. 由于 $\det B = -2019 \equiv 1 \pmod{2}$. 所以 $\det A \equiv 1 \pmod{2}$. 故 $\det A \neq 0$.

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 φ 是 \mathbb{R} 上严格单调增加的连续函数, ψ 是 φ 的反函数, 实数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+2} = \psi\left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\varphi(x_n) + \frac{1}{\sqrt{n}}\varphi(x_{n+1})\right), \quad n \geq 2.$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛或举例说明 $\{x_n\}$ 有可能发散.

证明. 我们断言 $\{x_n\}$ 收敛. 证明如下. 记 $y_n = \varphi(x_n)$, 则

$$y_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)y_n + \frac{1}{\sqrt{n}}y_{n+1}, \quad n \geq 2.$$

令

$$a_n = \min\{y_n, y_{n-1}\}, \quad b_n = \max\{y_n, y_{n-1}\} \quad n \geq 3.$$

则

$$a_n \leq y_{n+1} \leq b_n, \quad n \geq 3.$$

进而

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n, \quad n \geq 3.$$

所以 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 均单调有界, 从而收敛.

..... (5 分)

特别, $\{y_n\}$ 有界. 由于

$$y_{n+2} - y_{n+1} = -\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)(y_{n+1} - y_n), \quad n \geq 2.$$

因此

$$|y_{n+2} - y_{n+1}| \leq |y_3 - y_2| \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad n \geq 2.$$

由 $\prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 发散到零, 得到 $\lim_{n \rightarrow \infty} (y_{n+1} - y_n) = 0$.

..... (10 分)

所以

$$b_n - a_n = |y_n - y_{n-1}| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

这样, $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的极限相等, 从而 $\{y_n\}$ 收敛.

最后, 由 ψ 的连续性得到 $\{x_n\}$ 收敛.

..... (15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 对于有界区间 $[a, b]$ 的划分

$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$, 其范数定义为 $\|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} (x_{k+1} - x_k)$. 现设 $[a, b]$ 上函数 f 满足 Lipschitz 条件, 即存在常数 $M > 0$ 使得对任何 $x, y \in [a, b]$, 成立

$|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$. 定义 $s(f; P) \equiv \sum_{k=0}^n \sqrt{|x_{k+1} - x_k|^2 + |f(x_{k+1}) - f(x_k)|^2}$. 若

$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$ 存在, 则称曲线 $y = f(x)$ 可求长. 记 P_n 为 $[a, b]$ 的 2^n 等分. 证明:

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n)$ 存在.

(2) 曲线 $y = f(x)$ 可求长.

证明. 法 I. 我们有

$$0 \leq s(f; P) \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{M^2 + 1} |x_{k+1} - x_k| = (b - a) \sqrt{M^2 + 1}.$$

因此, $s(f; P)$ 有界.

..... (3 分)

(1) 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f; P_n) \leq s(f; P_{n+1}), \quad \forall n \geq 1.$$

因此, $\{s(f; P_n)\}$ 单调增加, 结合有界性知其收敛. 设极限为 L .

..... (8 分)

一般地, 对于划分 P, Q , 用 $P \oplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f; P \oplus Q) \geq s(f; P).$$

(2) 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有 $m \geq 1$ 使得

$$s(f; P_m) \geq L - \varepsilon.$$

对于划分 P , 用 $P \oplus P_m$ 表示由 P 和 P_m 的所有分点为分点的划分, 则

$$s(f; P \oplus P_m) \geq s(f; P_m) \geq L - \varepsilon.$$

在 $s(f; P \oplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f; P)$ 的和式中不同的项是涉及 P_m 的分点的项, 总数不超过 2^{m+1} 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P \oplus P_m\| \leq \|P\|$. 因此, 这些项的



和不超过 $2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\|$. 于是

$$s(f; P) \geq s(f; P \oplus P_m) - 2^{m+1}\sqrt{M^2+1}\|P\| \geq L - \varepsilon - 2^{m+1}\sqrt{M^2+1}.$$

这样

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L - \varepsilon.$$

进而

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L.$$

.....(14分)

类似地, 记 $K = \overline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$. 对于任何 $\varepsilon > 0$, 有划分 Q 使得

$$s(f; Q) \geq K - \varepsilon.$$

则

$$s(f; Q \oplus P_m) \geq s(f; Q) \geq K - \varepsilon.$$

在 $s(f; Q \oplus P_m)$ 的和式中, 与 $s(f; P_m)$ 的和式中不同的项是涉及 Q 的分点的项, 总数不超过 $2N$ 项, 其中 N 是划分 Q 的分点数. 因此, 这些项的和不超过 $2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|$. 于是

$$s(f; P_m) \geq s(f; Q \oplus P_m) - 2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\| \geq K - \varepsilon - 2N\sqrt{M^2+1}\|P_m\|.$$

这样

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} s(f; P_m) \geq K - \varepsilon.$$

进而 $L \geq K$. 结合 $K \geq \lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L$ 得到

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) = L.$$

即 $y = f(x)$ 可求长.

.....(20分)

法 II. 事实上, 注意到 (1) 是 (2) 的推论, 我们只需直接证明 (2). 具体证明如下.

我们有

$$0 \leq s(f; P) \leq \sum_{k=0}^n \sqrt{M^2 + 1} |x_{k+1} - x_k| = (b - a) \sqrt{M^2 + 1}.$$

因此, $s(f; P)$ 有界.

..... (3 分)

对于划分 P, Q , 用 $P \oplus Q$ 表示由 P 和 Q 的所有分点为分点的划分, 由平面上点和点距离的三角不等式, 立即有

$$s(f; P \oplus Q) \geq s(f; P).$$

..... (8 分)

考虑划分列 $\{Q_k\}$ 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|Q_k\| = 0$, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s(f; Q_k) = L \equiv \overline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0} s(f; P).$$

..... (10 分)

对于每个 $k \geq 1$, 设 N_k 为划分 Q_k 的分点数.

$$s(f; P \oplus P_m) \geq s(f; P_m) \geq L - \varepsilon.$$

在 $s(f; P \oplus Q_k)$ 的和式中, 与 $s(f; P)$ 的和式中不同的项是涉及 Q_k 的分点的项, 总数不超过 $2N_k$ 项, 相应的小区间长度不超过 $\|P \oplus Q_k\| \leq \|P\|$. 因此, 这些项的和不超过 $2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\|$. 于是

$$s(f; P) \geq s(f; P \oplus Q_k) - 2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\| \geq s(f; Q_k) - 2N_k \sqrt{M^2 + 1} \|P\|.$$

这样

$$\underline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq s(f; Q_k), \quad \forall k \geq 1.$$

进而

$$\underline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P) \geq L = \overline{\lim}_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P).$$

所以 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0^+} s(f; P)$ 存在. 即 $y = f(x)$ 可求长. 自然也有 $\lim_{n \rightarrow \infty} s(f; P_n)$ 存在.

..... (20 分)