第七届全国大学生数学竞赛决赛一、二年级试题解答

(数学类, 2016年3月 福州)

一、(本题20分) 填空题(每小题5分)

(1) 0; (2) $p>1$; (3) $3\sqrt{2}\pi$;

(4) $(1,0,1)$, 或$(-1,0,-1)$, 或$(1,t,-1)$, 或$(-1,t,1)$, $t\in\mathbb{R}$.

二、(本题15分) 由于形如$\alpha x+\beta y+\gamma=0$的平面与$S$只能交于直线或空集, 所以可以设平面$\sigma$的方程为

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma,$$

它与S的交线为圆. 令$x=\cos\theta$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$, 则$\sigma$与$S$的交线可表示为

$$\Gamma(\theta)=\Big(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma\Big),\ \theta\in[0,2\pi].$$

由于$\Gamma(\theta)$是一个圆, 所以它到一个定点$P(a,b,c)$的距离为常数R. 于是有恒等式

$$(\cos\theta-a)^2+\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-b\Big)^2+\Big(\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma-c\Big)^2=R^2.$$

利用

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos2\theta),\ \sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)$$

我们可以将上式写成

$$A\cos2\theta+B\sin2\theta+C\cos\theta+D\sin\theta+E=0,$$

其中A, B, C, D, E为常数. 由于这样的方程对所有$\theta\in[0,2\pi]$恒成立, 所以$A=B=C=D=E=0$.

特别地, 我们得到

$$A=\frac{1}{2}(\alpha^2+1)-\frac{1}{4}(\beta^2+1)=0,\ B=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta=0.$$

于是得到$\alpha=0$, $\beta=\pm1$, 平面σ的法向量为

$$(-\alpha,-\beta,1)=(0,1,1) \text{ 或 } (0,-1,1)$$

的非零倍数.

三、(本题15分)

证明 存在可逆方阵T, 使得$T^{-1}AT=\tilde{A}$为对角阵. 令$T^{-1}BT=\tilde{B}$, 则$\tilde{B}$为实对称方阵, 且

$$\operatorname{tr}((AB)^2)=\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2),\quad \operatorname{tr}(A^2B^2)=\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2).$$

令$\tilde{A}=\operatorname{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$, $\tilde{B}=(b_{ij})_{n\times n}$. 则

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2)&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji}\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}^2b_{ij}^2\\&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ii}^2+a_{jj}^2)b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2.\end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2)-\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ii}-a_{jj})^2b_{ij}^2\leqslant 0.$$

四、(本题20分)

证明 设Γ的圆心为O, $\alpha_i=\frac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1}$, $B_{n+1}=B_1$, 则$P_A=2\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\alpha_i$, $P_B=2\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$.

先证: 当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, 有

$$\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x>x. \tag{1}$$

令$g(x)=\frac{\sin x}{\cos^{1/3}x}-x$, 则$g(0)=0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos^{4/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-2/3}x\sin^2 x}{\cos^{2/3}x}-1 \\ &= \frac{2\cos^2 x+1}{3\cos^{4/3}x}-1 \\ &> \frac{3\sqrt[3]{\cos^2 x\cdot\cos^2 x\cdot 1}}{3\cos^{4/3}x}-1=0, \end{aligned}$$

故$g(x)$严格单调递增, 因而$g(x)>g(0)=0$. (1)式得证.

$$\begin{aligned} P_A^{1/3}\cdot P_B^{2/3} &= 2\left(\sum_{i=1}^n \tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^n \sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^n (\tan^{1/3}\alpha_i)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^n (\sin^{2/3}\alpha_i)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &\geqslant 2\sum_{i=1}^n \tan^{1/3}\alpha_i\cdot\sin^{2/3}\alpha_i \\ &> 2\sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi. \end{aligned}$$

五、(本题15分)

证明 令$F(x)=\int_0^x a(t)\mathrm{d}t$, 则

$$y(x)=C\mathrm{e}^{-F(x)}+\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{F(t)-F(x)}\mathrm{d}t.$$

对任意$\epsilon>0$, 存在x_0, 当$t\geqslant x_0$时, 有$|f(t)|\leqslant\epsilon a(t)$.

$$\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{F(t)-F(x)}\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-F(x)}\int_0^{x_0} f(t)\mathrm{e}^{F(t)}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-F(x)}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{e}^{F(t)}\mathrm{d}t.$$

注意到

$$\begin{aligned} \left|\mathrm{e}^{-F(x)}\int_{x_0}^x f(t)\mathrm{e}^{F(t)}\mathrm{d}t\right| &\leqslant \mathrm{e}^{-F(x)}\int_{x_0}^x \epsilon a(t)\mathrm{e}^{F(t)}\mathrm{d}t \\ &= \epsilon\mathrm{e}^{-F(x)}\mathrm{e}^{F(t)}\Big|_{t=x_0}^{t=x} \\ &= \epsilon(1-\mathrm{e}^{-F(x)+F(x_0)}) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

故

$$\varlimsup_{x\to+\infty}|y(x)|\leqslant\lim_{x\to+\infty}C\mathrm{e}^{-F(x)}+\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-F(x)}\int_0^{x_0}|f(t)|\cdot\mathrm{e}^{-F(t)}\mathrm{d}t+\epsilon=\epsilon.$$

由ϵ的任意性知$\lim\limits_{x\to+\infty}|y(x)|=0$.

六、(本题15分)

解 令$g(x)=f(x)-x$, 则有

$$xg(x)=2\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\mathrm{d}t.$$

对于$x>0$, 根据积分平均值定理, 存在$x_1\in(0,x)$, 使得

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x}g(t)\mathrm{d}t=g(x_1)\frac{x}{2}.$$

因而

$$g(x)=g(x_1).$$

设

$$x_0=\inf\{t\in(0,x)\mid f(t)=f(x)\}.$$

则有$g(x_0)=g(x)$. 若$x_0>0$, 则重复上面的过程, 可知存在$y_0\in(0,x_0)$, 使得$g(y_0)=g(x_0)=g(x)$. 这与x_0的取法矛盾. 因此, 必有$x_0=0$. 这说明$g(x)=g(0)$.

同理, 对$x<0$, 也可证明$g(x)=g(0)$.

总之, $g(x)$是常数. 于是$f(x)=x+C$, C是常数.