第七届全国大学生数学竞赛决赛三、四年级试题解答

(数学类, 2016年3月 福州)

一、(本题20分) 填空题(每小题5分)

(1) 0;　　(2) $p>1$;　　(3) $3\sqrt{2}\pi$;

(4) $(1,0,1)$, 或$(-1,0,-1)$, 或$(1,t,-1)$, 或$(-1,t,1)$, $t\in\mathbb{R}$.

二、(本题15分) 由于形如$\alpha x+\beta y+\gamma=0$的平面与$S$只能交于直线或空集, 所以可以设平面$\sigma$的方程为

$$z=\alpha x+\beta y+\gamma,$$

它与S的交线为圆. 令$x=\cos\theta$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$, 则$\sigma$与$S$的交线可表示为

$$\Gamma(\theta)=\Big(\cos\theta,\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta,\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma\Big),\ \theta\in[0,2\pi].$$

由于$\Gamma(\theta)$是一个圆, 所以它到一个定点$P(a,b,c)$的距离为常数R. 于是有恒等式

$$(\cos\theta-a)^2+\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta-b\Big)^2+\Big(\alpha\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\beta\sin\theta+\gamma-c\Big)^2=R^2.$$

利用

$$\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1+\cos2\theta),\ \sin^2\theta=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)$$

我们可以将上式写成

$$A\cos2\theta+B\sin2\theta+C\cos\theta+D\sin\theta+E=0,$$

其中A, B, C, D, E为常数. 由于这样的方程对所有$\theta\in[0,2\pi]$恒成立, 所以$A=B=C=D=E=0$.

特别地, 我们得到

$$A=\frac{1}{2}(\alpha^2+1)-\frac{1}{4}(\beta^2+1)=0,\ B=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha\beta=0.$$

于是得到$\alpha=0$, $\beta=\pm1$, 平面σ的法向量为

$$(-\alpha,-\beta,1)=(0,1,1) \text{ 或 } (0,-1,1)$$

的非零倍数.

三、(本题15分)

证明 存在可逆方阵T, 使得$T^{-1}AT=\tilde{A}$为对角阵. 令$T^{-1}BT=\tilde{B}$, 则$\tilde{B}$为实对称方阵, 且

$$\operatorname{tr}((AB)^2)=\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2),\quad \operatorname{tr}(A^2B^2)=\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2).$$

令$\tilde{A}=\operatorname{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$, $\tilde{B}=(b_{ij})_{n\times n}$. 则

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2)=&\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}a_{jj}b_{ij}b_{ji}\\ =&\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2a_{ii}a_{jj}b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)=&\sum_{i,j=1}^{n}a_{ii}^2b_{ij}^2\\ =&\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ii}^2+a_{jj}^2)b_{ij}^2+\sum_{i=1}^{n}a_{ii}^2b_{ii}^2.\end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{tr}((\tilde{A}\tilde{B})^2)-\operatorname{tr}(\tilde{A}^2\tilde{B}^2)=-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_{ii}-a_{jj})^2b_{ij}^2\leqslant 0.$$

四、(本题20分)

证明 设Γ的圆心为O, $\alpha_i=\frac{1}{2}\angle B_iOB_{i+1}$, $B_{n+1}=B_1$, 则$P_A=2\sum\limits_{i=1}^{n}\tan\alpha_i$, $P_B=2\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\alpha_i$.

先证: 当$0<x<\frac{\pi}{2}$时, 有

$$\tan^{\frac{1}{3}}x\sin^{\frac{2}{3}}x>x. \qquad (1)$$

令$g(x)=\frac{\sin x}{\cos^{1/3}x}-x$, 则$g(0)=0$,

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\cos^{4/3}x+\frac{1}{3}\cos^{-2/3}x\sin^2 x}{\cos^{2/3}x}-1 \\ &= \frac{2\cos^2 x+1}{3\cos^{4/3}x}-1 \\ &> \frac{3\sqrt[3]{\cos^2 x\cdot\cos^2 x\cdot 1}}{3\cos^{4/3}x}-1=0, \end{aligned}$$

故$g(x)$严格单调递增, 因而$g(x)>g(0)=0$. (1)式得证.

$$\begin{aligned} P_A^{1/3}\cdot P_B^{2/3} &= 2\left(\sum_{i=1}^{n}\tan\alpha_i\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}\sin\alpha_i\right)^{\frac{2}{3}} \\ &= 2\left(\sum_{i=1}^{n}(\tan^{1/3}\alpha_i)^3\right)^{\frac{1}{3}}\left(\sum_{i=1}^{n}(\sin^{2/3}\alpha_i)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \\ &\geqslant 2\sum_{i=1}^{n}\tan^{1/3}\alpha_i\cdot\sin^{2/3}\alpha_i \\ &> 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=2\pi. \end{aligned}$$

五、(本题10分)

证明 首先, 令$G_1=(u_1)$, $G_2=(v_1)$, $G_3=(u_2)$, $G_4=(v_2)$,

$$T=\{g_1g_2\mid g_1\in G_1, g_2\in G_2\},\ H=\{g_3g_4\mid g_3\in G_3, g_4\in G_4\},$$

则T、H均为G的阿贝尔子群. 进一步, 由$(8,13)=1$可知

$$G_1\cap G_2=\{e\},\ G_3\cap G_4=\{e\}.$$

结果, $T=G_1G_2$为内直积分解, $H=G_3G_4$为内直积分解.

其次, 分别计算u_1v_1与u_2v_2的阶.

若$(u_1v_1)^x=e$, 则$u_1^xv_1^x=e$, 由$T=G_1G_2$为内直积分解得$u_1^x=v_1^x=e$, 从而$8\mid x$, $13\mid x$, 故$o(u_1v_1)=8\times 13$, 即有$T=(u_1v_1)$. 同理知: $o(u_2v_2)=8\times 13$, 即有$H=(u_2v_2)$. 注意到$u_1v_1=u_2v_2$, 故$T=H$.

第三, $u_2\in G_3\subseteq H=T$, 故u_2可表为: $u_2=g_1g_2$, $g_1\in G_1$, $g_2\in G_2$. 结果$u_2^8=g_1^8g_2^8$, 即$g_2^8=e$.

令$g_2 = v_1^t$, 于是$v_1^{8t} = e$, 得$13 \mid 8t$, 故$g_2 = e$, 由此得$u_2 \in G_1$. 同理可知$v_2 \in G_2$.

第四, 再次考虑到$u_1 v_1 = u_2 v_2$以及$T = G_1 G_2$为内直积分解, 因此有$u_1 = u_2$, $v_1 = v_2$.

最后, 直接计算可知, $u_1 u_2$的阶为4, $v_1 v_2$的阶为13.

六、(本题10分)

证明 令$E_1 = E - \mathbb{Q}$, 其中$\mathbb{Q}$是有理数集, 则E_1无内点, 且$m(E_1) = m(E)$.

(i) 存在闭集$E_2 \subset E_1$, 使得$a < m(E_2) < m(E_1) = m(E)$.

对$m(E_1) > a + q > a$的正实数q, 由测度的连续性知, 存在$A \subset E_1$, 使得$m(A) = a + q$. 由可测集的定义, 对$\frac{q}{2}$, 存在闭集$E_2 \subset A$, 使得$m(A - E_2) < \frac{q}{2}$, 于是$m(E_2) = m(A) - m(A - E_2) > a + q - \frac{q}{2} = a + \frac{q}{2} > a$. 又$m(E_2) \leqslant m(A) = a + q < m(E_1)$, 即$a < m(E_2) < m(E_1) = m(E)$.

(ii) 令$f(x) = m(E_2 \cap [-x, x])$, $x \in \mathbb{R}$, 可证$f(x)$是连续单增函数, 且$f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m(E_2) > a$.

由连续函数的介值定理知: 存在$r > 0$, 使得$f(r) = m(E_2 \cap [-r, r]) = a$.

令$F = E_2 \cap [-r, r]$, 则F为无内点的有界闭集, 且$F \subset E$, $m(F) = a$.

七、(本题10分)

证明 设e_1, e_2, e_3为曲线γ的Frenet标架:

$$e_1 = \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s},\ e_2 = \frac{1}{k} \cdot \frac{\mathrm{d}^2\gamma}{\mathrm{d}s^2},\ e_3 = e_1 \times e_2.$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}s} = k e_2,\ \frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}s} = -k e_1 + \tau e_3,\ \frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}s} = -\tau e_2,$$

其中τ为曲线γ的挠率.

设$\beta = e_2 : [0, \ell] \to S^2$, 为球面上的简单闭曲线, 它的弧长参数为$\tilde{s}$. 于是有

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s} = -k e_1 + \tau e_3,\ \frac{\mathrm{d}\tilde{s}}{\mathrm{d}s} = \sqrt{k^2 + \tau}.$$

球面在$\beta(s)$点的单位法向量为β, 曲线$\beta(s)$的切向量为$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}=-ke_1+\tau e_3$, 所以曲线$\beta(s)$在球面上的法向量$\tilde{e}_2$为

$$\tilde{e}_2=\frac{\beta\times\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}}{\left|\beta\times\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\right|}=\frac{1}{\sqrt{k^2+\tau^2}}(\tau e_1+ke_3).$$

于是, 曲线β在球面上的测地曲率

$$\begin{aligned}k_g &=\tfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}\tilde{s}^2}\cdot\tilde{e}_2=\left(\tfrac{\mathrm{d}^2\beta}{\mathrm{d}s^2}\left(\tfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\tilde{s}}\right)^2+\tfrac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}s}\cdot\tfrac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}\tilde{s}^2}\right)\cdot\tilde{e}_2\\ &=\tfrac{1}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\left(-\tfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}e_1+\tfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}e_3\right)\cdot(\tau e_1+ke_3)\\ &=\tfrac{1}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\left(k\tfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\tfrac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right).\end{aligned}$$

故有

$$\begin{aligned}\textstyle\int_B k_g\mathrm{d}\tilde{s} &=\textstyle\int_0^\ell\frac{1}{(k^2+\tau^2)^{3/2}}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right)\sqrt{k^2+\tau^2}\mathrm{d}s\\ &=\textstyle\int_0^\ell\frac{1}{(k^2+\tau^2)}\left(k\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}-\tau\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s=\int_0^\ell\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(\arctan(\tau/k))\mathrm{d}s\\ &=\arctan\frac{\tau}{k}\Big|_0^\ell=0,\end{aligned}$$

其中用到闭曲线性质: $k(0)=k(\ell)$, $\tau(0)=\tau(\ell)$.

由于B为简单闭曲线, 它围成球面一个单连通区域D. 由Gauss-Bonett定理, 有

$$\int_B k_g\mathrm{d}\tilde{s}+\int_D K\mathrm{d}S=2\pi.$$

对球面而言, Gauss曲率$K=1$, 故区域D的面积$|D|=2\pi$, 为球面面积的一半.

八、(本题10分)

解 1. 令$q(x)=x^3-p(x)$. 我们证明$q(x)$具有形式: $q(x)=xJ^2(x)$, 其中$J(x)$为一次多项式. 首先说明$q(x)$的根都为实数. 实际上$q(x)$必有一实根α_1, 若另两个为一对共轭复根, 则$q(x)$具有形式: $q(x)=(x-\alpha_1)(x^2+ax+b)$, 且$a^2-4b<0$. 由于$q(x)\geqslant 0$, $\alpha_1\leqslant 0$, $q(x)>x(x+a/2)^2$, $\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x>\int_0^1 x(x+a/2)^2\mathrm{d}x$. 这与$||q(x)||_1$达到最小矛盾! 因此, $q(x)$的三个根都为实数, 设为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

若$q(x)$的三个根互不相等, 则$\alpha_i \leqslant 0$, $\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^1 x^3\mathrm{d}x > \int_0^1 x(x-1/2)^2\mathrm{d}x$, 矛盾! 因此$q(x)$有两个根相等,设$\alpha_2 = \alpha_3$. 故$q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)^2$, 并且$\alpha_1 = 0$时$\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x$会更小.

由于$\int_0^1 q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{12}(6\alpha_2^2 - 8\alpha_2 + 3)$, 当$\alpha_2 = 2/3$, 即$p(x) = x^3 - q(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{4}{9}x$时, $||x^3 - p(x)||_1$最小.

2. 令$q(x) = x^4 - p(x)$. 类似于1的分析, $q(x)$的根都为实数, 且都为重根, 即$q(x) = J^2(x)$, $J(x)$为二次多项式. 设$J(x) = x^2 + ax + b$, 则$f(a,b) := \int_0^1 q(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{5} + \frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b + \frac{1}{3}a^2 + ab + b^2$. 由

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{2}{3}a + b + \frac{1}{2} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial b} = a + 2b + \frac{2}{3} = 0$$

解得

$$a = -1,\ b = \frac{1}{6}.$$

因此, $p(x) = x^4 - (x^2 - x + \frac{1}{6})^2 = 2x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{36}$.

九、(本题10分)

证明 设$\epsilon > 0$, $g(z) = 1 + \epsilon - f(z)$, 则$g(z)$在$D$上解析, $g(0) = 1 + \epsilon > 0$, $\mathrm{Re}g(z) = 1 + \epsilon - \mathrm{Re}f(z) \geqslant \epsilon > 0$. 因而

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right|^2 = \frac{|g(z)|^2 - 2(1+\epsilon)\mathrm{Re}g(z) + (1+\epsilon)^2}{|g(z)|^2 + 2(1+\epsilon)\mathrm{Re}g(z) + (1+\epsilon)^2} < 1,$$

所以, $\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}$是一个将$D$映入$D$, 将0映到0的解析函数, 根据Schwarz引理, 有

$$\left|\frac{g(z)-g(0)}{g(z)+g(0)}\right| \leqslant |z|.$$

令$\epsilon \to 0$, 得到

$$\frac{|f(z)|}{|2-f(z)|} \leqslant |z|.$$

两边平方得, $|f(z)|^2 \leqslant |z|^2(4 - 4\mathrm{Re}f(z) + |f(z)|^2)$, 即,

$$(1-|z|^2)|f(z)|^2 \leqslant 4|z|^2(1-\mathrm{Re}f(z)).$$

由于$(\mathrm{Re}f(z))^2 \leqslant |f(z)|^2$, 从上式可得

$$\left(\mathrm{Re}f(z)+\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}\right)^2 \leqslant \frac{4|z|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

由此即得

$$\mathrm{Re}f(z) \leqslant \frac{2|z|}{1-|z|^2}-\frac{2|z|^2}{1-|z|^2}=\frac{2|z|}{1+|z|}.$$

十、(本题10分)

解 用A_n表示事件"经n次试验后, 黑球出现在甲袋中", $\bar{A}_n$表示事件"经n次试验后, 黑球出现在乙袋中", C_n表示事件"第n次从黑球所在的袋中取出一个白球". 记$p_n = P(A_n)$, $q_n = P(\bar{A}_n) = 1-p_n$, $n = 1,2,\cdots$. 当$n \geqslant 1$时, 由全概率公式得

$$\begin{aligned}
p_n &= P(A_n \mid A_{n-1})P(A_{n-1}) + P(A_n \mid \bar{A}_{n-1})P(\bar{A}_{n-1}) \\
&= P(C_n \mid A_{n-1})P(_{n-1}) + P(\bar{C}_n \mid \bar{A}_{n-1})P(\bar{A}_{n-1}) \\
&= p_{n-1}\cdot \tfrac{N-1}{N} + q_{n-1}\cdot \tfrac{1}{N} \\
&= \tfrac{N-1}{N}\cdot p_{n-1} + \tfrac{1}{N}\cdot(1-p_{n-1}).
\end{aligned}$$

因此, 可得递推等式

$$p_n = \frac{N-2}{N}\cdot p_{n-1} + \frac{1}{N}\ (n \geqslant).$$

由于初始条件$p_0 = 1$, 于是由递推关系式, 并利用等比级数求和公式, 得

$$\begin{aligned}
p_n &= \tfrac{1}{N} + \tfrac{1}{N}\cdot\tfrac{N-2}{N} + \cdots + \tfrac{1}{N}\left(\tfrac{N-2}{N}\right)^{n-1} + \left(\tfrac{N-2}{N}\right)^n \\
&= \tfrac{1}{N}\left[1-\left(\tfrac{N-2}{N}\right)^n\right] \big/ \left(1-\tfrac{N-2}{N}\right) + \left(\tfrac{N-2}{N}\right)^n \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{N-2}{N}\right)^n.
\end{aligned}$$

故黑球出现在甲袋中的概率为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\frac{N-2}{N})^n$.

若$N = 2$, 则对任何n, 有$p_n = \frac{1}{2}$.

若$N > 2$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{2}$.