第七届全国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷

(数学类, 2016年3月 福州)

一、(本题20分) 填空题(每小题5分)

(1) 设Γ为形如下列形式的2016阶矩阵全体: 矩阵的每行每列只有一个非零元素, 且该非零元素为1. 则$\sum\limits_{A\in\Gamma}|A| =$ ________.

(2) 令$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\mathrm{d}x$. 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^p$收敛, 则$p$的取值范围是________.

(3) 设$D: x^2+2y^2 \leqslant 2x+4y$, 则积分$I = \iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

(4) 若实向量$X = (a,b,c)$的三个分量a,b,c满足$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{2016} = I_2$, 其中$I_2$为2阶单位方阵, 则$X =$ ________.

二、(本题15分) 在空间直角坐标系中, 设S为椭圆柱面$x^2+2y^2=1$, σ是空间中的平面, 它与S的交集是一个圆. 求所有这样平面σ的法向量.

三、证明题(15分) 设A,B为n阶实对称矩阵. 证明$\mathrm{tr}((AB)^2) \leqslant \mathrm{tr}(A^2B^2)$.

四、(本题20分) 设单位圆Γ的外切n边形$A_1A_2\cdots A_n$各边与Γ分别切于$B_1,B_2,\cdots,B_n$. 令P_A, P_B分别表示多边形$A_1A_2\cdots A_n$与$B_1B_2\cdots B_n$的周长.

求证: $P_A^{\frac{1}{3}}P_B^{\frac{2}{3}} > 2\pi$.

五、(本题15分) 设$a(x), f(x)$为$\mathbb{R}$上的连续函数, 且对任意$x\in\mathbb{R}$有$a(x)>0$. 已知$\int_0^{\infty} a(x)\mathrm{d}x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{a(x)} = 0$, 且$y'(x)+a(x)y(x) = f(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

求证: $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

六、(本题15分) 设$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的连续函数, 且满足方程

$$xf(x) = 2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t + \frac{x^2}{4}.$$

求$f(x)$.