

# 第四届全国大学生数学竞赛预赛试卷

## (数学类, 2012)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	15	15	10	10	10	15	25	100
得分								

注意: 1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2、密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3、如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设  $\Gamma$  为椭圆抛物面  $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$ . 从原点作  $\Gamma$  的切锥面. 求切锥面方程.

专业: \_\_\_\_\_

考生座位号: \_\_\_\_\_

所在院校: \_\_\_\_\_

准考证号: \_\_\_\_\_

姓名: \_\_\_\_\_

线

封

密

得 分	
评阅人	

二 (本题 15 分) 设  $\Gamma$  为抛物线,  $P$  是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过  $P$  的直线  $L$  与  $\Gamma$  围成的有界区域的面积记为  $A(L)$ . 证明:  $A(L)$  取最小值当且仅当  $P$  恰为  $L$  被  $\Gamma$  所截出的线段的中点.

姓名：\_\_\_\_\_ 准考证号：\_\_\_\_\_ 所在院校：\_\_\_\_\_ 考生编号：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_

密 封 线

得 分	
评阅人	

三、(本题 10 分) 设  $f \in C^1[0, +\infty)$ ,  $f(0) > 0$ ,  $f'(x) \geq 0$ ,

$\forall x \in [0, +\infty)$ . 若  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x) + f'(x)} < +\infty$ , 求证:  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{f(x)} < +\infty$ .

得 分	
评阅人	

四、（本题 10 分）设  $A, B, C$  均为实  $n$  阶正定矩阵，

$P(t) = At^2 + Bt + C$ ， $f(t) = \det P(t)$ ，其中  $t$  为未定元， $\det P(t)$  表

示  $P(t)$  的行列式。若  $\lambda$  为  $f(t)$  的根，证明： $\lambda$  的实部为负数。

姓名：\_\_\_\_\_ 准考证号：\_\_\_\_\_ 所在院校：\_\_\_\_\_ 考生编号：\_\_\_\_\_ 专业：\_\_\_\_\_

密 封 线

得 分	
评阅人	

五 (本题 10 分) 已知  $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ ,  $|x| < 1$ ,

$n$  为正整数. 求  $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$  .

得 分	
评阅人	

六、(本题 15 分) 设  $f : [0,1] \rightarrow R$  可微, 其中  $R$  为实数集. 已知  $f(0) = f(1)$ ,  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ , 且对任

意  $x \in [0,1]$  有  $f'(x) \neq 1$ . 求证: 对任意正整数  $n$ , 有  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}$  .

得分	
评阅人	

七、(本题 25 分) 已知实矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

证明:

(1) 矩阵方程  $AX = B$  有解但  $BY = A$  无解的充要条件是  $\begin{cases} a \neq 2 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$  ;

(2)  $A$  相似于  $B$  的充要条件是  $\begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$  ;

(3)  $A$  合同于  $B$  的充要条件是  $\begin{cases} a < 2 \\ b = 3 \end{cases}$  .