

第二届全国大学生数学竞赛预赛试卷

(数学类, 2010)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	总分
满分	10	15	10	10	15	20	10	10	100
得分									

- 注意: 1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
 2、密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3、如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题共 10 分) 设 $\varepsilon \in (0,1)$, $x_0 = a$, $x_{n+1} = a + \varepsilon \sin x_n$ ($n=0,1,2,\dots$). 证明 $\xi = \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ 存在, 且 ξ 为方程 $x - \varepsilon \sin x = a$ 的唯一根.

得分	
评阅人	

二、(本题共 15 分) 设 $B = \begin{pmatrix} 0 & 10 & 30 \\ 0 & 0 & 2010 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明 $X^2 = B$ 无

解, 这里 X 为三阶未知复方阵.

专业: _____

年级: _____

所在院校: _____

身份证号: _____

姓名: _____

线
—
封
—
密

得 分	
评阅人	

三、(本题共 10 分) 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是凸区域, 函数 $f(x, y)$ 是凸函数.

证明或否定: $f(x, y)$ 在 D 上连续.

注: 函数 $f(x, y)$ 为凸函数的定义是 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 以及 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in D$, 成立

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2, \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2) \leq \alpha f(x_1, y_1) + (1-\alpha)f(x_2, y_2).$$

姓名：_____ 身份证号：_____ 所在院校：_____ 年级：_____ 专业：_____

线
封
密

得 分	
评阅人	

四、(本题共 10 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, 在 $x=1$ 可导, $f(1)=0$, $f'(1)=a$. 证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \int_0^1 x^n f(x) dx = -a$.

得 分	
评阅人	

五、(本题共 15 分) 已知二次曲面 Σ (非退化) 过以下九点:
 $A(1,0,0)$, $B(1,1,2)$, $C(1,-1,-2)$, $D(3,0,0)$, $E(3,1,2)$, $F(3,-2,-4)$,
 $G(0,1,4)$, $H(3,-1,-2)$, $I(5,2\sqrt{2},8)$. 问 Σ 是哪一类曲面?

得 分	
评阅人	

六、(本题共 20 分) 设 A 为 $n \times n$ 实矩阵 (未必对称), 对任一 n 维实向量 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha A \alpha^T \geq 0$ (这里 α^T 表示 α 的转置), 且存在 n 维实向量 β 使得 $\beta A \beta^T = 0$. 同时对任意 n 维实向量 x

和 y , 当 $x A y^T \neq 0$ 时有 $x A y^T + y A x^T \neq 0$. 证明: 对任意 n 维实向量 v , 都有 $v A v^T = 0$.

姓名：_____ 身份证号：_____ 所在院校：_____ 年级：_____ 专业：_____

线
封
密

得 分	
评阅人	

七、(本题共 10 分) 设 f 在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积, $0 \leq f \leq 1$. 求证: 对任何 $\varepsilon > 0$, 存在只取值为 0 和 1 的分段 (段数有限) 常值函数 $g(x)$, 使得 $\forall [\alpha, \beta] \subseteq [0,1]$,

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \right| < \varepsilon.$$

得分	
评阅人	

八、(10分) 已知 $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ 是一个严格单调下降的连续函数，满足 $\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = +\infty$ ，且

$$\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi^{-1}(t) dt = a < +\infty, \text{ 其中 } \varphi^{-1} \text{ 表示 } \varphi \text{ 的反函数.}$$

求证： $\int_0^{+\infty} [\varphi(t)]^2 dt + \int_0^{+\infty} [\varphi^{-1}(t)]^2 dt \geq \frac{1}{2} a^{\frac{3}{2}}.$