

# 第十一届全国大学生数学竞赛初赛试卷 (数学类A卷, 2019年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

- 注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.  
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.  
 3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 空间中有两个圆球面  $B_1$  和  $B_2$ ,  $B_2$  包含在  $B_1$  所围球体的内部, 两球面之间的闭区域为  $D$ . 设  $B$  是含在  $D$  中的一个圆球, 它与球面  $B_1$  和  $B_2$  均相切. 问:

- (i) (4分)  $B$  的球心轨迹构成的曲面  $S$  是何种曲面;  
 (ii) (2分)  $B_1$  的球心和  $B_2$  的球心是曲面  $S$  的何种点.

证明你的论断 (9分).

答:  $B$  的球心轨迹构成的曲面  $S$  为旋转椭球面 (2分+2分=4分);  $B_1$  和  $B_2$  的球心为  $S$  的两个焦点 (2分).

证明: 设  $B_1$  的球心为  $O_1$ , 半径为  $R_1$ ,  $B_2$  的球心为  $O_2$ , 半径为  $R_2$ . 设  $B$  是含在  $D$  中的一个球, 球心在  $P$  点, 半径为  $r$ , 它与球  $B_1$  和  $B_2$  均相切. 因为  $B$  与  $B_1$  内切, 所以  $PO_1 = R_1 - r$ . 因为  $B$  与  $B_2$  外切, 所以  $PO_2 = R_2 + r$ . 于是有

$$PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$$

总是常数. (4分)

设  $l$  是过球心  $O_1$  和  $O_2$  的直线. 因为  $B_1$  和  $B_2$  在以  $l$  为不动轴的空间旋转下不变, 故区域  $D$  也在以  $l$  为不动轴的空间旋转下不变.  $B$  在以  $l$  为不动轴的空间旋转下保持与  $B_1$  和  $B_2$  均相切, 它的球心  $P$  在以  $l$  为不动轴的空间旋转下是一个圆周. 在每个过直线  $l$  的平面  $\Sigma$  上, 由于  $PO_1 + PO_2 = R_1 + R_2$  总是常数,  $B$  的球心轨迹  $P$  在平面  $\Sigma$  上

专业: \_\_\_\_\_ 座位号: \_\_\_\_\_ 考场号: \_\_\_\_\_ 所在院校: \_\_\_\_\_ 准考证号: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_

答题时不要超过此线  
密封线

是一个椭圆. 故 $B$ 的球心轨迹构成的曲面 $S$ 为旋转椭球, 旋转轴为过 $O_1$ 和 $O_2$ 的直线, 并且两球心 $O_1$ 和 $O_2$ 为旋转椭球的两个焦点. (9分)



得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设  $\alpha > 0$ ,  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上非负, 是二阶导函数,  $f(0) = 0$ , 且在  $[0, 1]$  上不恒为零. 求证: 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得

$$\xi f''(\xi) + (\alpha + 1)f'(\xi) > \alpha f(\xi).$$

**证明** (反证法) 若结论不对, 则对一切  $x \in [0, 1]$  有

$$x f''(x) + (\alpha + 1)f'(x) \leq \alpha f(x).$$

这说明函数  $x f'(x) + \alpha f(x) - \alpha \int_0^x f(u) du$  的导数非正, 因而单调递减, 但它在 0 取 0, 故,

$$x f'(x) + \alpha f(x) \leq \alpha \int_0^x f(u) du, \quad x \in [0, 1]. \quad (\dots 5 \text{分})$$

因而

$$x^\alpha f'(x) + \alpha x^{\alpha-1} f(x) \leq \alpha x^{\alpha-1} \int_0^x f(u) du, \quad x \in [0, 1].$$

将上式在  $[0, x]$  上积分, 可得

$$\begin{aligned} x^\alpha f(x) &\leq \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left( \int_0^t f(u) du \right) dt \\ &\leq \alpha \int_0^x t^{\alpha-1} \left( \int_0^x f(u) du \right) dt \\ &= x^\alpha \int_0^x f(u) du. \end{aligned}$$

故,

$$f(x) \leq \int_0^x f(u) du. \quad (\dots 10 \text{分})$$

记,  $g(x) = \int_0^x f(u) du$ . 则从上式可得  $g'(x) \leq g(x)$ . 因此

$$(e^{-x} g(x))' \leq 0.$$

这说明  $e^{-x} g(x)$  在  $[0, 1]$  上递减. 注意到  $g(0) = 0$ , 可得  $g(x) \leq 0$ . 但从  $f(x)$  非负可知  $g(x) \geq 0$ . 故,  $g(x) \equiv 0$ . 从而  $f(x) \equiv 0$ . 这与  $f(x)$  不恒为零矛盾! (\dots 15分)

得分	
评阅人	

三、(本题15分) 设 $A$ 为 $n$ 阶复方阵, $p(x)$ 为 $I - \bar{A}A$ 的特征多项式,其中 $\bar{A}$ 表 $A$ 的共轭矩阵. 证明: $p(x)$ 必为实系数多项式.

证明: 记

$$p(t) = \det(tI - (I - A\bar{A})) = \det((t-1)I + A\bar{A})$$

为 $I - A\bar{A}$ 的特征多项式. 对任何实数 $t$ , 有

$$(*) \quad \overline{p(t)} = \overline{\det((t-1)I + A\bar{A})} = \det((t-1)I + \bar{A}A).$$

(5分)

对任何两个方阵 $A$ 和 $B$ , 有 $\det(sI + AB) = \det(sI + BA)$ , 证明如下: 取可逆矩阵序列 $B_n$ 使得 $B_n \rightarrow B$  (例如, 对充分大的 $n$ 取 $B_n = B + \frac{1}{n}I$ ), 则

$$\det(sI + AB_n) = \det(sB_n^{-1} + A)\det B_n = \det B_n \det(sB_n^{-1} + A) = \det(sI + B_nA).$$

令 $n \rightarrow \infty$ , 得到公式 $\det(sI + AB) = \det(sI + BA)$ . 用 $B = \bar{A}$ 代入公式, 则有

$$\overline{p(t)} = \det((t-1)I + \bar{A}A) = \det((t-1)I + A\bar{A}) = p(t)$$

对所有的实数 $t$ 成立, 故 $p(t)$ 的系数都是实数.

(15分)

注: 也可通过利用分块矩阵初等变换求 $\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix}$ 的行列式来证明公式 $\det(sI - AB) = \det(sI - BA)$ . 具体地:

$$\forall s \neq 0, \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & sI - AB \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & B \\ A & sI \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A/s & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - BA/s & B \\ 0 & sI \end{pmatrix}$$

对上两矩阵等式两边取行列式即得 $\det(sI - AB) = \det(sI - BA)$  对一切非零的实数均成立. 从而多项式 $\det(sI - AB) - \det(sI - BA) \equiv 0$ , 因为多项式 $\det(sI - AB) - \det(sI - BA)$ 至多是 $n$ 次多项式. 获证.

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 已知 $f_1$ 为实 $n$ 元正定二次型. 令  
 $V = \{f \mid f \text{ 为实 } n \text{ 元二次型, 满足: 对任何实数 } k \text{ 有 } kf + f_1 \text{ 属于恒号二次型}\}$ ,

这里恒号二次型为0二次型, 正定二次型及负定二次型的总称. 证明:  $V$ 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并求这个向量空间的维数.

**证法1:** 设 $f \in V$ ,  $f$ 与 $f_1$ 所对应的二次型矩阵分别为 $A$ 和 $B$ . 由 $B$ 正定可推得

$$\exists P \text{ 可逆, 使得 } B = PP^T, A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^T. \quad (10\text{分})$$

由条件: 对任何实数 $k$ 有 $kf + f_1$ 属于恒号二次型可推得 $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$ .

事实上, 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . 则由式子

$$kf + f_1 = (z_1, \dots, z_n)P \begin{pmatrix} k\lambda_1 + 1 & & \\ & \ddots & \\ & & k\lambda_n + 1 \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

知, 总可取某实数 $q$ , 使得 $(q\lambda_1 + 1)(q\lambda_2 + 1) < 0$ . 从而可取两点:  $(z_1, \dots, z_n)P = (0, 1, 0, \dots, 0)$  及  $(z_1, \dots, z_n)P = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $qf + f_1$ 在该两点取值异号, 矛盾.

到此, 我们实际上得到 $V = \{kf_1 \mid k \in \mathbb{R}\}$ .

直接可知,  $V$ 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并这个向量空间的维数是1. 证毕. (20分)

**证法2:** 首先,  $V \neq \emptyset$ , 因为 $0 \in V$ , 且对任何实数 $k$ 有 $kf_1 \in V$ . (2分)

其次, 对任意非零 $f \in V$ , 若存在 $k \in \mathbf{R}$ , 使得 $kf + f_1 \equiv 0$ , 则由 $f_1$ 的正定性, 可知 $k \neq 0$ , 从而 $f = -\frac{1}{k}f_1$ ; 若对任意的 $k \in \mathbf{R}$ ,  $kf + f_1 \neq 0$ , 则由条件知,  $kf + f_1$ 要么为正定二次型, 要么为负定二次型. 断言:  $f$ 和 $f_1$ 必线性相关.

用反证法. 若 $f$ 和 $f_1$ 线性无关, 则由 $f_1$ 正定知, 存在点 $P_1$ 使得 $f_1(P_1) > 0$ . 此时考察二次型 $g = f_1(P_1)f - f(P_1)f_1$ , 由 $f$ 和 $f_1$ 线性无关知 $g \neq 0$  (因为 $\{f_1(P_1), -f(P_1)\}$ 是一组不全为零的数), 故存在 $P_2$ 使得

$$(*) \quad 0 \neq g(P_2) = f_1(P_1)f(P_2) - f(P_1)f_1(P_2).$$

此时有

$$(i) \quad P_2 \neq (0, \dots, 0), f_1(P_2) > 0;$$

(ii)  $f(P_2), f(P_1)$ 不同时为零.

先考虑 $f(P_1) \neq 0$ 的情形, 由(\*)式有

$$\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_2) + f_1(P_2) = \frac{g(P_2)}{-f(P_1)} \neq 0.$$

令  $k = \frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}$ , 由 $kf + f_1$  恒号可知: 当 $\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} > 0$ 时,  $\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) > 0$ , 明显上述不等式左边为零, 矛盾.

当 $\frac{g(P_2)}{-f(P_1)} < 0$ 时, 得 $\frac{f_1(P_1)}{-f(P_1)}f(P_1) + f_1(P_1) < 0$ , 不等式左边为零, 矛盾.

接下来考虑 $f(P_2) \neq 0$ 的情形. 同样由(\*)式有

$$-\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}f(P_1) + f_1(P_1) = \frac{g(P_2)}{-f(P_2)} \neq 0.$$

令  $k = -\frac{f_1(P_2)}{f(P_2)}$ , 类似地, 由 $kf + f_1$  恒号可得矛盾.断言获证. (15分)

现在,  $f$ 与 $f_1$  线性相关, 故存在一组不全为0 得数 $\lambda_1, \mu$ , 使得  $\lambda_1 f_1 + \mu f = 0$ .

若 $\lambda_1 = 0$ , 则  $\mu \neq 0$ , 因此有  $f = -\frac{\lambda_1}{\mu} f_1$ . 若 $\lambda_1 \neq 0$ , 则由 $\lambda_1 f_1 \neq 0$  知  $\mu \neq 0$ , 因此仍然有  $f = -\frac{\lambda_1}{\mu} f_1$ .

到此, 我们实际上得到 $V = \{kf_1 | k \in \mathbb{R}\}$ . (18分)

最后直接可知,  $V$ 按照通常的二次型加法和数乘构成一个实向量空间, 并这个向量空间的维数是 1. (20分)



密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题15分) 设  $\delta > 0, \alpha \in (0, 1)$ , 实数列  $\{x_n\}$

满足

$$x_{n+1} = x_n \left(1 - \frac{h_n}{n^\alpha}\right) + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}, \quad n \geq 1,$$

其中  $\{h_n\}$  有正的上、下界. 证明:  $\{n^\delta x_n\}$  有界.

**证明.** 记  $c := \inf_{n \geq 1} h_n$ .

由题设可知存在  $N \geq 1$  使得当  $n \geq N$  时, 成立

$$|x_{n+1}| \leq \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right) |x_n| + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}}$$

.....(+3 分= 3 分)

以及

$$\frac{\delta}{n} \leq \frac{c}{2n^\alpha}.$$

.....(+3 分= 6 分)

取  $C := \max\left(N^\delta |x_N|, \frac{2}{c}\right)$ . 我们来证明对于  $n \geq N$  成立  $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$ . 首先, 由  $C$  的定义知当  $n = N$  时, 有  $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$ . 进一步, 若对某个  $n \geq N$  成立  $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$ , 则

$$\begin{aligned} |x_{n+1}| - \frac{C}{(n+1)^\delta} &\leq \left(1 - \frac{c}{n^\alpha}\right) \frac{C}{n^\delta} + \frac{1}{n^{\alpha+\delta}} - \frac{C}{(n+1)^\delta} \\ &= C \left(\frac{1}{n^\delta} - \frac{1}{(n+1)^\delta}\right) - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\dots\dots\dots(+3 分= 9 分) \\ &\leq \frac{C\delta}{n^{1+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} \leq \frac{Cc}{2n^{\alpha+\delta}} - \frac{Cc-1}{n^{\alpha+\delta}} = -\frac{Cc-2}{2n^{\alpha+\delta}} \leq 0. \end{aligned}$$

.....(+3 分= 12 分)

因此, 由数学归纳法得到当  $n \geq N$  时, 总成立  $|x_n| \leq \frac{C}{n^\delta}$ . 因此,  $\{n^\delta x_n\}$  有界.

.....(+3 分= 15 分)

得分	
评阅人	

六、(本题20分) 设  $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$ .

(i) 证明  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的凸函数. 进一步, 证明当  $x, y \geq 0$  时成立  $f(x) + f(y) \leq f(0) + f(x+y)$ .

(ii) 设  $n \geq 3$ , 试确定集合  $E \equiv \left\{ \sum_{k=1}^n f(x_k) \mid \sum_{k=1}^n x_k = 0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ .

解:

(i) 我们有

$$f'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}, \quad f''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}.$$

当  $x \geq 0$  时, 成立  $f''(x) \geq 0$ . 所以  $f(x)$  是  $[0, +\infty)$  上的凸函数.

..... (+4 分=4 分)

从而  $f'(x)$  在  $[0, +\infty)$  上单调增加, 因此对于  $x, y \geq 0$ , 有

$$f(x+y) - f(x) - f(y) + f(0) = \int_0^y (f'(t+x) - f'(t)) dt \geq 0.$$

..... (+2 分=6 分)

(ii) 由连续性, 易见  $E$  是一个区间.

..... (+2 分=8 分)

我们有  $f(x) + f(-x) = 1$ .

..... (+2 分=10 分)

下设  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$ .

若  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ , 则  $\sum_{j=1}^n f(x_j) = \frac{n}{2}$ .

若  $x_1, x_2, \dots, x_n$  不全为零, 设其中负数的个数为  $k$ , 非负数的个数为  $m$ , 则  $m+k=n, 1 \leq k \leq n-1$ .

不妨设  $x_1, \dots, x_m \geq 0, x_{m+1}, \dots, x_n < 0$ . 记  $y_1 = -x_{m+1}, y_2 = -x_{m+2}, \dots, y_k = -x_n, x = x_1 + \dots + x_m = y_1 + \dots + y_k$ , 则由 (i) 易得

$$f(y_1) + f(y_2) + \dots + f(y_k) \leq (k-1)f(0) + f(x).$$

注意到  $mf\left(\frac{x}{m}\right) - f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上严格单减,

..... (+4 分=14 分)





答题时不要超过此线

我们有

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n f(x_j) &= \sum_{j=1}^m f(x_j) + k - \sum_{j=1}^k f(y_j) \\ &\geq mf\left(\frac{x}{m}\right) + k - \left((k-1)f(0) + f(x)\right) \\ &> \lim_{u \rightarrow +\infty} \left[ mf\left(\frac{u}{m}\right) + k - \left((k-1)f(0) + f(u)\right) \right] \\ &= \frac{k+1}{2} \geq 1. \end{aligned}$$

这表明  $\inf E \geq 1$  而  $1 \notin E$ .

另一方面, 取  $u > 0, x_1 = x_2 = \dots = x_{n-1} = \frac{u}{n-1}, x_n = -u$ , 则

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( (n-1)f\left(\frac{u}{n-1}\right) + 1 - f(u) \right) = 1.$$

因此,  $\inf E = 1$ .

..... (+4 分= 18 分)

另一方面, 由  $f(-x) = 1 - f(x)$  可得

$$E = \{n - z | z \in E\}.$$

因此,  $\sup E = n - 1$ , 且  $n - 1 \notin E$ .

所以  $E$  为开区间  $(1, n - 1)$ .

..... (+2 分= 20 分)