第七届全国大学生数学竞赛决赛试卷

(非数学类, 2016年3月 福州)

一、填空题(本题满分30分, 共5小题, 每小题6分)

(1) 微分方程$y'' - (y')^3 = 0$的通解为____________.

(2) 设$D: 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. 则积分$I = \iint_D (x + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2-4)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$的值是____________.

(3) 设$f(t)$二阶连续可导, 且$f(t) \neq 0$. 若$\begin{cases} x = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s, \\ y = f(t), \end{cases}$ 则$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} =$ ____________.

(4) 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$n$阶方阵$A$的特征值, $f(x)$为多项式, 则矩阵$f(A)$的行列式的值为____________.

(5) 极限$\lim\limits_{a \to \infty} [n \sin(\pi n! \mathrm{e})]$的值是____________.

二、(本题满分14分) 设函数$f(u,v)$在全平面上有连续的偏导数, 曲面S由方程$f(\frac{x-a}{z-c}, \frac{y-b}{z-c}) = 0$确定. 证明: 该曲面的所有切平面都交于点$(a,b,c)$.

三、(本题满分14分) 设$f(x)$在$[a,b]$上连续. 证明:

$$2\int_a^b f(x)\left(\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2.$$

四、(本题满分14分) 设A是$m \times n$矩阵, B是$n \times p$矩阵, C是$p \times q$矩阵.

证明: $R(AB) + R(BC) - R(B) \leqslant R(ABC)$, 其中$R(X)$表示矩阵$X$的秩.

五、(本题满分14分) 设$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \mathrm{d}x$, 其中$n$为正整数.

(1) 若$n \geqslant 2$, 计算: $I_n + I_{n-2}$;

(2) 设p为实数, 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n^p$的绝对收敛性和条件收敛性.

六、(本题满分14分) 设$P(x,y,z)$和$R(x,y,z)$在空间上有连续偏导数. 记上半球面$S: z = z_0 + \sqrt{r^2 - (x-x_0)^2 - (y-y_0)^2}$, 方向向上. 若对任何

点(x_0, y_0, z_0)和$r > 0$, 第二型曲面积分

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

证明: $\frac{\partial P}{\partial x} \equiv 0$.