座位号______ 考场号______ 姓名______ 准考证号______ 学校______ 省市______

密封线密封线密封线

第九届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（非数学类，2018 年 3 月）

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
满分	30 分	11 分	11 分	12 分	12 分	12 分	12 分	100 分
得分								

注意：本试卷共七大题，满分 100 分, 考试时间为 180 分钟.

1 所有答题都须写在此试题纸密封线右边, 写在其他纸上无效.

2 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3 当题空白不够, 可写在当页背面, 并注明题号.

得分	
评阅人	

一（填空题，本题满分 30 分，共 5 小题，每小题 6 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=$______________.

2. **设一平面过原点和点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为**______________.

3. 设 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，满足 $\mathrm{d}f(x,y)=ye^y\mathrm{d}x+x(1+y)e^y\mathrm{d}y$，及 $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$______________.

4. **满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$ 及 $u(0)=1$ 的可微函数 $u(t)=$**______________.

5. 设 a,b,c,d 是互不相同的正实数，x,y,z,w 是实数，满足 $a^x=bcd$，$b^y=cda$，$c^z=dab$，$d^w=abc$，则行列式 $\begin{vmatrix}-x & 1 & 1 & 1\\ 1 & -y & 1 & 1\\ 1 & 1 & -z & 1\\ 1 & 1 & 1 & -w\end{vmatrix}=$______________.

得分	
评阅人	

二（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内连续，且存在两两互异的点 $x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$，使得

$$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta,$$

证明：对任意 $\lambda\in(\alpha,\beta)$，存在互异的点 $x_5,x_6\in(0,1)$，使得 $\lambda=\dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

省市________ 学校________ 准考证号________ 姓名________ 考场号________ 座位号________

密封线密封线密封线

得分	
评阅人	

三（本题满分 11 分）

设函数 $f\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \neq 0$，证明：在区间 $\left[0,1\right]$ 上存在三个不同的点 x_1, x_2, x_3，使得

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}\,t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3$$
$$=\left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2} f(t)\,\mathrm{d}\,t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$$

得分	
评阅人	

四（本题满分 12 分）

求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]$.

省市______学校______准考证号______姓名______考场号______座位号______

密封线密封线密封线

得分	
评阅人	

五（本题满分 12 分）

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^n$，定义

$$H(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}, \quad n\ge 2.$$

(1) 证明：对任一非零 $x\in\mathrm{R}^n$，$H(x)>0$；

(2) 求 $H(x)$ 满足条件 $x_n=1$ 的最小值.

得分	
评阅人	

六（本题满分 12 分）

设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le a^2\right\}$ 上具有一阶连续偏导数，且满足 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2}=a^2$，以及 $\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]=a^2$，其中 $a>0$. 证明：$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\le\frac{4}{3}\pi a^4$.

得分	
评阅人	

七（本题满分 12 分）

设 $0<a_n<1$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}=q$（有限或 $+\infty$）.

（1）证明：当 $q>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

（2）讨论 $q=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性并阐述理由.

省市______ 学校______ 准考证号______ 姓名______ 考场号______ 座位号______

密封线密封线密封线