

第 8 届全国大学生数学竞赛（非数学类）预赛参考解答

(2016 年 10 月)

一 填空题（满分 30 分，每小题 5 分）

1. 若  $f(x)$  在点  $x = a$  可导，且  $f(a) \neq 0$ ，则  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解：  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(a) + f'(a) \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$ 。

2. 若  $f(1)=0$ ， $f'(1)$  存在，求极限  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \tan 3x}{(e^{x^2} - 1) \sin x}$ 。

解：  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) \cdot 3x}{x^2 \cdot x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x)}{x^2}$

所以

$$\begin{aligned} I &= 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(\sin^2 x + \cos x) - f(1)}{\sin^2 x + \cos x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} \\ &= 3f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + \cos x - 1}{x^2} = 3f'(1) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 x}{x^2} - \frac{1 - \cos x}{x^2} \right) \\ &= 3f'(1) \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} f'(1) \end{aligned}$$

3. 设  $f(x)$  有连续导数，且  $f(1) = 2$ 。记  $z = f(e^x y^2)$ ，若  $\frac{\partial z}{\partial x} = z$ ，求  $f(x)$  在  $x > 0$  的表达式。

解：由题设得  $\frac{\partial z}{\partial x} = f'(e^x y^2) e^x y^2 = f'(e^x y^2)$ 。令  $u = e^x y^2$ ，得到当  $u > 0$  有

$$f'(u)u = f(u), \quad \text{即} \quad \frac{f'(u)}{f(u)} = \frac{1}{u}, \quad \text{从而} \quad (\ln f(u))' = (\ln u)'.$$

所以有  $\ln f(u) = \ln u + c_1$ ， $f(u) = cu$ 。再而由初始条件得  $f(u) = 2u$ 。

故当  $x > 0$  有  $f(x) = 2x$ 。

4. 设  $f(x) = e^x \sin 2x$ , 求  $f^{(4)}(0)$ 。

解。由 Taylor 展式得

$$f(x) = \left[ 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3) \right] \left[ 2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + o(x^4) \right]$$

所以  $f(x)$  展式的 4 次项  $\frac{-1}{3!}(2x)^3 \cdot x + \frac{2}{3!}x^4 = -x^4$ , 从而  $\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -1$ , 故  $f^{(4)}(0) = -24$ 。

5. 求曲面  $z = \frac{x^2}{2} + y^2$  平行于平面  $2x + 2y - z = 0$  的切平面方程。

解。该曲面在点  $(x_0, y_0, z_0)$  的切平面的法向量为  $(x_0, 2y_0, -1)$ 。又该切平面于已知平面平行,

从而两平面法向量平行, 故  $\frac{x_0}{2} = \frac{2y_0}{2} = \frac{-1}{-1}$ 。

从而  $x_0 = 2, y_0 = 1$ , 得  $z_0 = \frac{x_0^2}{2} + y_0^2 = 3$ , 从而所求切平面为

$$2(x-2) + 2(y-1) - (z-3) = 0,$$

即  $2x + 2y - z = 3$ 。

二 (满分 14 分) 设  $f(x)$  在  $[0,1]$  上可导,  $f(0) = 0$ , 且当  $x \in (0,1)$ ,  $0 < f'(x) < 1$ 。试证当  $a \in (0,1)$ ,

$$\left( \int_0^a f(x) dx \right)^2 > \int_0^a f^3(x) dx。$$

证: 设  $F(x) = \left( \int_0^x f(t) dt \right)^2 - \int_0^x f^3(t) dt$ , 则  $F(0) = 0$  且要证明  $F'(x) > 0$ 。

设  $g(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - f^2(x)$ , .....3'

则  $F'(x) = f(x)g(x)$ , .....5'

由于  $f(0) = 0, f'(x) > 0$ , 故  $f(x) > 0$ , 从而

只要证明  $g(x) > 0, x > 0$ 。而  $g(0) = 0$ , 我们只要证明  $g'(x) > 0, 0 < x < a$ 。

而  $g'(x)=2f(x)[1-f'(x)]>0$ ，得证。 .....6'

三（满分 14 分）某物体所在的空间区域为  $\Omega: x^2 + y^2 + 2z^2 \leq x + y + 2z$ ，密度函数为

$$x^2 + y^2 + z^2, \text{ 求质量 } M = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz.$$

解. 由于  $\Omega: \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 \leq 1$ ，是一个椭球， .....2'

其体积为  $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ . 作变换  $u = x - \frac{1}{2}$ ,  $v = y - \frac{1}{2}$ ,  $w = \sqrt{2}\left(z - \frac{1}{2}\right)$ ，将  $\Omega$  变为单位球

$\Sigma: u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ ，而  $\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \sqrt{2}$ ，故  $dudvdw = \sqrt{2} dx dy dz$  且

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Sigma} \left[ \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\right)^2 \right] dudvdw. \text{ .....4'}$$

因一次项积分都是 0，故

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \iiint_{\Sigma} \left( u^2 + v^2 + \frac{w^2}{2} \right) dudvdw + A,$$

其中  $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) V = \frac{\pi}{2}$ . .....4'

$$\text{记 } I = \iiint_{\Sigma} (u^2 + v^2 + w^2) dudvdw = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^1 r^2 \cdot r^2 \sin \theta dr = \frac{4\pi}{5}.$$

由于  $u^2, v^2, w^2$  在  $\Sigma$  上积分都是  $I/3$ ，故

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) I + A = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{6} \pi \text{ .....4'}$$

四（满分 14 分）设函数  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上具有连续导数， $f(0) = 0, f(1) = 1$ 。证明：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) = -\frac{1}{2}.$$

证明 将区间  $[0, 1]$   $n$  等分，设分点  $x_k = \frac{k}{n}$ ，则  $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ ，且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) dx - \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k \right) \text{ .....3'}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} [f(x) - f(x_k)] dx \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(x) - f(x_k)}{x - x_k} (x - x_k) dx \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n \frac{f(\xi_k) - f(x_k)}{\xi_k - x_k} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) dx \right) \quad (\text{其中 } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k)) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - x_k) dx \right) \quad (\text{其中 } \eta_k \text{ 在 } \xi_k, x_k \text{ 之间}) \quad \dots\dots\dots 6' \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left( \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) \left( -\frac{1}{2} (x_k - x_{k-1})^2 \right) \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{2} \left( \sum_{k=1}^n f'(\eta_k) (x_k - x_{k-1}) \right) = -\frac{1}{2} \int_0^1 f'(x) dx = -\frac{1}{2}. \quad \dots\dots\dots 5'
\end{aligned}$$

五 (满分 14 分) 设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $I = \int_0^1 f(x) dx \neq 0$ 。证明在  $(0, 1)$  内

存在不同的两点  $x_1, x_2$ , 使得  $\frac{1}{f(x_1)} + \frac{1}{f(x_2)} = \frac{2}{I}$ 。

证明: 设  $F(x) = \frac{1}{I} \int_0^x f(t) dt$ , 则  $F(0) = 0, F(1) = 1$ 。由介值定理, 存在  $\xi \in (0, 1)$  使得  $F(\xi) = \frac{1}{2}$ 。 \dots\dots\dots 6'

在两个子区间  $(0, \xi)$ ,  $(\xi, 1)$  分别应用拉格朗日中值定理:

$$\begin{aligned}
F'(x_1) &= \frac{f(x_1)}{I} = \frac{F(\xi) - F(0)}{\xi - 0} = \frac{1/2}{\xi}, \quad x_1 \in (0, \xi), \\
F'(x_2) &= \frac{f(x_2)}{I} = \frac{F(1) - F(\xi)}{1 - \xi} = \frac{1/2}{1 - \xi}, \quad x_2 \in (\xi, 1), \quad \dots\dots\dots 6'
\end{aligned}$$

$$\frac{I}{f(x_1)} + \frac{I}{f(x_2)} = \frac{1}{F'(x_1)} + \frac{1}{F'(x_2)} = \frac{\xi}{1/2} + \frac{1 - \xi}{1/2} = 2. \quad \dots\dots\dots 2'$$

六: 设  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  可导, 且  $f(x) = f(x+2) = f(x+\sqrt{3})$ 。用 Fourier 级数理论证明  $f(x)$  为常数。

证: 由  $f(x) = f(x+2)$  知  $f$  为以 2 为周期的周期函数, 其 Fourier 系数分别为:

$$a_n = \int_{-1}^1 f(x) \cos n\pi x dx, \quad b_n = \int_{-1}^1 f(x) \sin n\pi x dx, \dots\dots\dots 4'$$

由  $f(x) = f(x + \sqrt{3})$  知

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x + \sqrt{3}) \cos n\pi x dx \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi(t - \sqrt{3}) dt \\ &= \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) (\cos n\pi \cos \sqrt{3}n\pi + \sin n\pi \sin \sqrt{3}n\pi) dt \\ &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \cos n\pi t dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1+\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) \sin n\pi t dt \\ &= \cos \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \cos n\pi t dt + \sin \sqrt{3}n\pi \int_{-1}^1 f(t) \sin n\pi t dt \end{aligned}$$

$$\text{所以 } a_n = a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi. \dots\dots\dots 6'$$

同理可得  $b_n = b_n \cos \sqrt{3}n\pi - a_n \sin \sqrt{3}n\pi$

$$\text{联立 } \begin{cases} a_n = a_n \cos \sqrt{3}n\pi + b_n \sin \sqrt{3}n\pi \\ b_n = b_n \cos \sqrt{3}n\pi - a_n \sin \sqrt{3}n\pi \end{cases}, \text{ 得 } a_n = b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \dots\dots\dots 2'$$

而  $f$  可导, 其 *Fourier* 级数处处收敛于  $f(x)$ , 所以

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a_0}{2}$$

其中  $a_0 = \int_{-1}^1 f(x) dx$  为常数。 \dots\dots\dots 2'