专业:________ 考生座位号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

第九届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷
(数学类, 2018年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意: 1. 前四大题是必答题, 再从五至十大题中任选三题, 题号要填入上面的表中(多选无效).

2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分, 每小题各 5分)填空题

(1) 设实方阵 $H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}$, $n\ge 1$, 其中I是与H_n同阶的单位方阵. 则$\operatorname{rank}(H_4)=$ ________.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=$ ________.

(3) 设Γ为空间曲线$\begin{cases}x=\pi\sin\dfrac{t}{2},\\ y=t-\sin t,\\ z=\sin 2t\end{cases}$, $t\in[0,\pi]$. 则第二型曲线积分 $\displaystyle\int_\Gamma e^{\sin x}\Big(\cos x\cos y\,dx-\sin y\,dy\Big)+\cos z\,dz=$ ________.

(4) 设二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$的矩阵$A$为$\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&\cdots&a&1&a\\a&a&\cdots&a&1\end{pmatrix}$,

其中$n>1,a\in\mathbb{R}$. 则f在正交变换下的标准形为 ________.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下，设有椭球面

$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0$$

及S外部一点$A(x_0,y_0,z_0)$，过A点且与S 相切的所有直线构成锥面Σ. 证明：存在平面Π，使得交线$S\cap\Sigma=S\cap\Pi$；同时求出平面Π的方程.

得分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设A, B, C均为n阶复方阵，且满足

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB.$$

1. 证明：C是幂零方阵；
2. 证明：A, B, C同时相似于上三角阵；
3. 若$C \neq 0$, 求n的最小值.

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx.$$

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题10分）设 G 为群，且满足：$\forall x, y \in G, (xy)^2 = (yx)^2$. 证明：$\forall x, y \in G$, 元素 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的阶不超过2.

得分	
评阅人	

六、（本题10分）设$E \subset \mathbb{R}^n$为可测集, $m(E) < \infty$. 设f, $f_k \in L^2(E)$,在E上几乎处处有$f_k \to f$，且

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(t)|^2 dt \leqslant \int_E |f(t)|^2 dt.$$

求证： $\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(t) - f(t)|^2 dt = 0.$

专业:________ 考生座位号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

七、（本题10分）已知椭圆柱面S：

$$\mathbf{r}(u,v)=\{a\cos u, b\sin u, v\},\quad -\pi\leqslant u\leqslant\pi,\quad -\infty<v<+\infty.$$

（1）求S上任意测地线的方程；

（2）设$a=b$. 取$P=(a,0,0)$, $Q=(a\cos u_0, a\sin u_0, v_0)$ $(-\pi<u_0<\pi, -\infty<v_0<+\infty)$. 写出$S$上连接$P,Q$两点的最短曲线的方程.

得分	
评阅人	

八、（本题10分）推导求解线性方程组的共轭梯度法的计算格式，并证明该格式经有限步迭代后收敛。

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

九、（本题10分）设函数$f(z)$ 在单位圆$|z| < 1$ 内解析，在其边界上连续.若在 $|z| = 1$ 上$|f(z)| = 1$. 证明 $f(z)$为有理函数.

得分	
评阅人	

十、（本题10分）设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立同分布的随机变量, 其有共同的分布函数$F(x)$和密度函数$f(x)$. 现对随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$按大小顺序重新排列为 $X_{n1} \leqslant X_{n2} \leqslant \cdots \leqslant X_{nn}$.

(a) 求随机变量(X_{n1}, X_{nn})的联合概率密度函数$f_{1n}(x, y)$;

(b) 如果$X_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)$服从区间[0, 1]上的均匀分布，求随机变量$U = X_{nn} + X_{n1}$的密度函数$f_U(u)$.