

第九届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷答案 (数学类, 2018年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

注意: 1. 本试卷共6大题.

2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 20 分每小题各 5 分)填空题

得分	
评阅人	

(1) 设实方阵 $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $H_{n+1} = \begin{pmatrix} H_n & I \\ I & H_n \end{pmatrix}$, $n \geq 1$, 其中 I 是与 H_n 同阶的单位方阵. 则 $\text{rank}(H_4) = \underline{10}$.

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x) - \ln(1 + \sin x)}{x^3} = \underline{\frac{1}{2}}$.

(3) 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases} x = \pi \sin \frac{t}{2}, \\ y = t - \sin t, \\ z = \sin 2t \end{cases}$ 从 $t = 0$ 到 $t = \pi$ 的一段. 则第二型曲线积分

$$\int_{\Gamma} e^{\sin x} (\cos x \cos y dx - \sin y dy) + \cos z dz = \underline{-2}.$$

(4) 设二次型 $f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的矩阵 A 为 $\begin{pmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \cdots & a & 1 & a \\ a & a & \cdots & a & 1 \end{pmatrix}$,

其中 $n > 1, a \in \mathbb{R}$. 则 f 在正交变换下的标准形为 $\underline{((n-1)a+1)y_1^2 - (a-1)y_2^2 - \cdots - (a-1)y_n^2}$.

参考答案. (1) H_n 是 $m = 2^n$ 阶对称方阵, 存在正交方阵 P 使得 $P^{-1}H_nP = D$ 是对角方阵. 从而, $H_{n+1} = \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O \\ O & P \end{pmatrix}^{-1}$ 与 $\begin{pmatrix} D & I \\ I & D \end{pmatrix}$ 相似. 设 H_n 的所有特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, 则 H_{n+1} 的所有特征值是 $\lambda_1 + 1, \lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1, \lambda_2 - 1, \dots, \lambda_m + 1, \lambda_m - 1$. 利用数学归纳法容易证明: H_n 的所有不同特征值为 $\{n - 2k \mid k = 0, 1, \dots, n\}$, 并且每个特征值 $n - 2k$ 的代数重数为 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. 因此, $\text{rank}(H_4) = 2^4 - C_4^2$.

方法二: 用分块矩阵初等变换直接计算即可.

(2)注: 利用 **Lagrange** 中值定理可以简化计算.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan x) - \ln(1 + \sin x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

(3) -2.

(4) 只需求出 A 的全部特征值即可. 显然 $A + (a - 1)I$ 的秩 ≤ 1 . 故 $A + (a - 1)I$ 的零空间的维数为 $\geq n - 1$, 从而可设 A 的 n 个特征值为

$$\lambda_1 = 1 - a, \lambda_2 = 1 - a, \dots, \lambda_{n-1} = 1 - a, \lambda_n.$$

注意到 $\text{tr}A = n$, 故得 $\lambda_n = (n - 1)a + 1$. 结果, f 在正交变换下的标准形为 $((n - 1)a + 1)y_1^2 - (a - 1)y_2^2 - \dots - (a - 1)y_n^2$.

得分	
评阅人	

面

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下, 设有椭球

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a, b, c > 0$$

及 S 外部一点 $A(x_0, y_0, z_0)$, 过 A 点且与 S 相切的所有直线构成锥面 Σ . 证明: 存在平面 Π , 使得交线 $S \cap \Sigma = S \cap \Pi$; 同时求出平面 Π 的方程.

解: 解法一:

因为 A 在 S 的外部, 故有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 > 0. \quad (1)$$

对于任意的 $M(x, y, z) \in S \cap \Sigma$, 连接 A, M 的直线记为 l_M , 其参数方程可设为

$$\tilde{x} = x + t(x - x_0), \quad \tilde{y} = y + t(y - y_0), \quad \tilde{z} = z + t(z - z_0), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (2)$$

代入椭球面的方程得

$$\frac{(x + t(x - x_0))^2}{a^2} + \frac{(y + t(y - y_0))^2}{b^2} + \frac{(z + t(z - z_0))^2}{c^2} = 1.$$

整理得

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + t^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 2 \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) \\ & + 2t \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) = 1. \end{aligned}$$

(6分)

因为点 M 在椭球面 S 上, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. 所以上式化为

$$t^2 \left(1 + \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 2 \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) + 2t \left(1 - \left(\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z \right) \right) = 0. \quad (3)$$

由于 l_M 与 S 在 M 点相切, 方程(3)有一个二重根 $t = 0$. 故有

$$\frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 = 0. \quad (4)$$

此时由(1)知, 方程(3)的首项系数化为

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} - 1 > 0.$$

特别地, (4)的系数均不为零因而是一个平面方程, 确定的平面记为 Π . 上述的推导证明了 $S \cap \Sigma \subset \Pi$, 从而证明了 $S \cap \Sigma \subset S \cap \Pi$.

(12分)

反之, 对于截线 $S \cap \Pi$ 上的任一点 $M(x, y, z)$, 由(3)、(4)两式即知, 由 A 、 M 两点确定的直线 l_M 一定在点 M 与 S 相切. 故由定义, l_M 在锥面 Σ 上. 特别地, $M \in \Sigma$. 由 M 的任意性, $S \cap \Pi \subset S \cap \Sigma$.

结论得证.

(15分)

解法二:

因为 A 在 S 的外部, 故有

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} > 1 > 0. \quad (5)$$

对于任意的 $M(x_1, y_1, z_1) \in S \cap \Sigma$, 椭球面 S 在 M 点的切平面方程可以写为

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y + \frac{z_1}{c^2}z - 1 = 0.$$

因为连接 M 和 A 两点的直线是 S 在点 M 的切线, 所以 A 点在上述切平面上. 故

$$\frac{x_1}{a^2}x_0 + \frac{y_1}{b^2}y_0 + \frac{z_1}{c^2}z_0 - 1 = 0.$$

于是, 点 $M(x_1, y_1, z_1)$ 在平面

$$\Pi: \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y + \frac{z_0}{c^2}z - 1 = 0$$

上, 即有 $M \in S \cap \Pi$.

(12分)

反之, 对于任意的 $M(x_1, y_1, z_1) \in S \cap \Pi$, 有

$$\frac{x_0}{a^2}x_1 + \frac{y_0}{b^2}y_1 + \frac{z_0}{c^2}z_1 - 1 = 0.$$

则 S 在 M 点的切平面

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y + \frac{z_1}{c^2}z - 1 = 0$$

通过 $A(x_0, y_0, z_0)$ 点, 因而 M, A 的连线在点 M 和椭球面 S 相切, 它在锥面 Σ 上. 故 $M \in S \cap \Sigma$.

结论得证.

(15分)

得分	
评阅人	

足

三、(本题 15 分) 设 A, B, C 均为 n 阶复方阵, 且满

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB.$$

1. 证明: C 是幂零方阵;
2. 证明: A, B, C 同时相似于上三角阵;
3. 若 $C \neq 0$, 求 n 的最小值.

证明.

1. 设 C 的不同特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 不妨设 C 具有 Jordan 标准型: $C = \text{diag}(J_1, \dots, J_k)$, 其中 J_i 为特征值 λ_i 对应的 Jordan 块. 对矩阵 B 做与 C 相同的分块, $B = (B_{ij})_{k \times k}$. 由 $BC = CB$ 可得 $J_i B_{ij} = B_{ij} J_j, i, j = 1, 2, \dots, k$. 这样对任意多项式 p 有 $p(J_i) B_{ij} = B_{ij} p(J_j)$. 取 p 为 J_i 的最小多项式, 则得 $B_{ij} p(J_j) = 0$. 当 $i \neq j$ 时, $p(J_j)$ 可逆, 从而 $B_{ij} = 0$. 因此, $B = \text{diag}(B_{11}, \dots, B_{kk})$. 同理, $A = \text{diag}(A_{11}, \dots, A_{kk})$. 由 $AB - BA = C$ 得 $A_{ii} B_{ii} - B_{ii} A_{ii} = J_i, i = 1, \dots, k$. 故 $\text{Tr}(J_i) = \text{Tr}(A_{ii} B_{ii} - B_{ii} A_{ii}) = 0, i = 1, 2, \dots, k$. 从而 $\lambda_i = 0$, 即 C 为幂零方阵. (5分)
2. 令 $V_0 = \{v \in \mathbb{C}^n \mid Cv = 0\}$, 显然 V_0 非空. 对任意 $v \in V_0$, 由于 $C(Av) = A(Cv) = 0$, 因此 $AV_0 \subseteq V_0$. 同理, $BV_0 \subseteq V_0$. 于是存在 $0 \neq v \in V_0$ 和 $\lambda \in \mathbb{C}$ 使得 $Av = \lambda v$. 记 $V_1 = \{v \mid Av = \lambda v, v \in V_0\} \subseteq V_0$, 由 $AB - BA = C$ 知, 对任意 $u \in V_1$, $A(Bu) = B(Au) + Cu = \lambda Bu$. 故 $BV_1 \subseteq V_1$. 从而存在 $0 \neq v_1 \in V_1$ 及 $\mu \in \mathbb{C}$ 使得 $Bv_1 = \mu v_1$, 同时有 $Av_1 = \lambda v_1, Cv_1 = 0$. 将 v_1 扩充为 \mathbb{C}^n 的一组基 $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令 $P = (v_1, \dots, v_n)$, 则

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad BP = P \begin{pmatrix} \mu & y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad CP = P \begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}.$$

其中 A_1, B_1, C_1 为 $n-1$ 阶复方阵且满足 $A_1 B_1 - B_1 A_1 = C_1, A_1 C_1 = C_1 A_1, B_1 C_1 = C_1 B_1$. 由数学归纳法即可得知, A, B, C 同时相似于上三角阵. (10分)

3. 当 $n \geq 3$ 时, 取 $A = E_{12}, B = E_{23}, C = E_{13}$, 则 A, B, C 满足题意. 对 $n = 2$, 不妨设 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则有 $AC = CA$ 得 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$. 类似由 $BC = CB$ 得 $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$. 于是 $AB - BA = 0$, 这与 $AB - BA = C$ 矛盾! 故满足 $C \neq 0$ 的最小 n 为 3.

(15分)

得分	
评阅人	

四、(本题20分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geq 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)| dx \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx + \int_0^1 |f''(x)| dx.$$

解答 设 $M = \max_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = |f'(x_1)|$, $m = \min_{x \in [0, 1]} |f'(x)| = |f'(x_0)|$. 则有

$$\int_0^1 |f''(x)| dx \geq \left| \int_{x_0}^{x_1} f''(x) dx \right| = |f'(x_1) - f'(x_0)| \geq M - m.$$

另一方面, 有 $\int_0^1 |f'(x)| dx \leq M \int_0^1 dx = M$. 故, 只需证明

$$m \leq 2 \int_0^1 |f(x)| dx. \quad (2)$$

(10分)

若 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 中有零点, 则 $m = 0$. 此时 (2) 显然成立. 现在假设 $f'(x)$ 在 $[0, 1]$ 上无零点, 不妨设 $f'(x) > 0$, 因而 $f(x)$ 严格递增. 下面分两种情形讨论.

情形 1. $f(0) \geq 0$. 此时 $f(x) \geq 0$ ($x \in [0, 1]$). 由 $f'(x) = |f'(x)| \geq m$, 得

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx + f(0) \\ &\geq \int_0^1 (f(x) - f(0)) dx = \int_0^1 f'(\xi)x dx \geq \int_0^1 mx dx = \frac{1}{2}m \end{aligned}$$

故, (2) 成立.

情形 2. $f(0) < 0$. 此时有 $f(1) \leq 0$, 根据 f 的递增性, 有 $f(x) \leq 0$ ($x \in [0, 1]$).

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(x)| dx &= - \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (f(1) - f(x)) dx - f(1) \\ &\geq \int_0^1 |f(1) - f(x)| dx = \int_0^1 |f'(\xi)|(1-x) dx \geq \int_0^1 m(1-x) dx = \frac{1}{2}m. \end{aligned}$$

此时, (2) 也成立.

注: 由 $f(0)f(1) \geq 0$, 可不妨设 $f(x) \geq 0, x \in [0, 1]$. 可只考虑情形 1. (20分)

得分	
评阅人	

五、(本题15分) 设 $\alpha \in (1, 2)$, $(1-x)^\alpha$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $n \times n$ 实常数矩阵 A 为幂零矩阵, I 为单位阵. 设矩阵值函数 $G(x)$ 定义为

$$G(x) \equiv (g_{ij}(x)) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k, \quad 0 \leq x < 1.$$

试证对于 $1 \leq i, j \leq n$, 积分 $\int_0^1 g_{ij}(x) dx$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

解答: 法 I. A 为幂零矩阵故有 $A^n = 0$. 记 $f(x) = (1-x)^\alpha$, 当 $j > k$ 时, 记 $C_k^j = 0$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^j x^{k-j} A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A^j, \quad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

(6分)

若有 $2 < m < n$ 使得 $A^m \neq 0, A^{m+1} = 0$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{m-\alpha} G(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)}{m!} A^m.$$

若 $m \geq 3$, 则 $m - \alpha > 1$, 此时, $\int_0^1 G(x) dx$ 发散. (11分)

另一方面, 若 $m \leq 2$, 则 $m - \alpha < 1$, 此时 $\int_0^1 G(x) dx$ 收敛.

总之, 使得对于 $1 \leq i, j \leq n$, 积分 $\int_0^1 g_{ij}(x) dx$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$. (15分)

法 II. 用 Jordan 标准型直接表示出 $G(x)$.

得分	
评阅人	

六、(本题15分) 有界连续函数 $g(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $1 < g(t) < 2$. $x(t), t \in \mathbb{R}$ 是方程 $\dot{x}(t) = g(t)x$ 的单调正解. 求证: 存在常数 $C_2 > C_1 > 0$ 满足

$$C_1 x(t) < |\dot{x}(t)| < C_2 x(t), t \in \mathbb{R}.$$

证明一. 令 $y = \frac{x'(t)}{x(t)}$, 则 y 定号. 不妨 $y(t) \geq 0$ (否则考虑 $t \rightarrow -t$). 下证结论对 $C_1 = 1, C_2 = \sqrt{3}$ 成立.

若存在 $t_0, y(t_0) > \sqrt{3} \Rightarrow$

$$y'(t) = \frac{x''(t)x(t) - x'(t)^2}{x^2(t)} = g(t) - y^2 < 2 - y^2 < -1, t < t_0$$

则 $y'(t) |_{t < t_0} < 0$. (5分)

$$\Rightarrow \frac{y'}{y^2 - 2} < -1, t < t_0$$

$$\Rightarrow \int_t^{t_0} \frac{y' ds}{y^2 - 2} < t - t_0, t < t_0$$

$\Rightarrow t > t_0 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{y(s)-2}{y(s)+2} \Big|_t^{t_0} > -L > -\infty, L > 0$ 为一个常数. 这与 $y(t)$ 在 \mathbb{R} 上有定义矛盾. (10分)

若存在 $t_0, y(t_0) < 1$ 则 $y' = g(t) - y^2 > \delta > 0, t < t_0$. 这 $\Rightarrow \exists t_1 < t_0, y(t_1) < 0$. 矛盾. (15分)

证明二. 不妨设 $x(t)$ 递增 (否则考虑方程 $\ddot{x} = g(-t)x$). 注意到 $\ddot{x} = g(t)x > 0 \Rightarrow x(-\infty) = \dot{x}(-\infty) = 0$. (5分)

$$\dot{x}\ddot{x} = g(t)x\dot{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 = \int_{-\infty}^t \dot{x}\ddot{x} ds = \int_{-\infty}^t g(s)x\dot{x} ds$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^t x\dot{x} ds < \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 < 2 \int_{-\infty}^t x\dot{x} ds$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x(t)^2 < \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2 < x(t)^2$$

$$\Rightarrow x(t) < \dot{x}(t) < \sqrt{2}x(t). \quad (15分)$$