

第八届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试题

(北京科技大学, 2017.3.18.)

一、(本题20分) 填空题(每小题5分)

(1) 设 $x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 的4个根为 a_1, a_2, a_3, a_4 , 则行列式
$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} =$$

_____.

(2) 设 a 为实数, 关于 x 的方程 $3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a = 0$ 有虚根的充分必要条件是 a 满足_____.

(3) 计算曲面积分 $I = \iint_S \frac{axdydz + (z+a)^2dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ ($a > 0$ 为常数), 其中 $S: z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 取上侧. $I =$ _____.

(4) 记两特征值为1, 2的2阶实对称矩阵全体为 Γ . $\forall A \in \Gamma$, a_{21} 表示 A 的(2, 1)位置元素. 则集合 $\bigcup_{A \in \Gamma} \{a_{21}\}$ 的最小元=_____.

二、(本题15分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 Γ 的方程为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$. 设 P 为空间中的平面, 它交抛物面于曲线 C . 问: C 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

三、证明题(15分) 设 n 阶方阵 A, B 满足: 秩(ABA) = 秩(B). 证明: AB 与 BA 相似.

四、(本题20分) 对 \mathbb{R} 上无穷次可微的(复值) 函数 $\varphi(x)$, 称 $\varphi \in \mathcal{J}$, 如果 $\forall m, k \geq 0$ 成立

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi^{(k)}(x)| < +\infty.$$

若 $f \in \mathcal{J}$, 可定义 $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i x y} dy$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). 证明: $\hat{f} \in \mathcal{J}$, 且

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi i x y} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

五、(本题10分) 设 $(F, +, \cdot)$ 是特征为 p ($p \neq 0$) 的域, 1和0分别为 F 的单位元和零元. 若 φ 为其加群 $(F, +)$ 到其乘法半群 (F, \cdot) 的同态, 即 $\forall x, y \in F$ 有 $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)$. 证明: φ 要么将 F 的所有元映照为0, 要么将 F 的所有元映照为1.

六、(本题10分) 1) 设 E 是三分Cantor集, 证明 $\chi_E(x)$ 不是 $[0, 1]$ 上的有界变差函数.

2) 设 $E \subset [0, 1]$, 证明 $\chi_E(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有界变差的充要条件是 E 的边界点集是有限集.

七、(本题10分) 设 S 为三维欧氏空间中的一张连通光滑的正则曲面, 过 S 上每一点都存在不同的三条直线落在曲面 S 上. 证明: S 是平面的一部分.

(林代数)