

# 第八届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试题

(北京科技大学, 2017.3.18.)

## 一、(本题20分) 填空题(每小题5分)

(1) 设 $x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = 0$ 的4个根为 $a_1, a_2, a_3, a_4$ , 则行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{10em}}.$$

(2) 设 $a$ 为实数, 关于 $x$ 的方程 $3x^4 - 8x^3 - 30x^2 + 72x + a = 0$ 有虚根的充分必要条件是 $a$ 满足\_\_\_\_\_.

(3) 计算曲面面积分 $I = \iint_S \frac{axdydz + (z+a)^2 dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$  ( $a > 0$ 为常数), 其中 $S$ :  $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ , 取上侧.  $I = \underline{\hspace{10em}}$ .

(4) 记两特征值为1, 2的2阶实对称矩阵全体为 $\Gamma$ .  $\forall A \in \Gamma$ ,  $a_{21}$ 表示 $A$ 的(2, 1)位置元素. 则集合 $\bigcup_{A \in \Gamma} \{a_{21}\}$ 的最小元=\_\_\_\_\_.

二、(本题15分) 在空间直角坐标系中设旋转抛物面 $\Gamma$ 的方程为 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ . 设 $P$ 为空间中的平面, 它交抛物面于曲线 $C$ . 问:  $C$ 是何种类型的曲线? 证明你的结论.

三、证明题(15分) 设 $n$ 阶方阵 $A, B$ 满足: 秩( $ABA$ ) = 秩( $B$ ). 证明:  $AB$ 与 $BA$ 相似.

四、(本题20分) 对 $\mathbb{R}$ 上无穷次可微的(复值) 函数 $\varphi(x)$ , 称 $\varphi \in \mathcal{J}$ , 如果 $\forall m, k \geq 0$ 成立

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m \varphi^{(k)}(x)| < +\infty.$$

若 $f \in \mathcal{J}$ , 可定义 $\hat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i xy} dy$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ). 证明:  $\hat{f} \in \mathcal{J}$ , 且

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) e^{2\pi i xy} dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

五、(本题15分) 设 $n > 1$ 为正整数. 令

$$S_n = \left(\frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{2}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

1. 证明: 数列 $S_n$ 单调增且有界, 从而极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在.

2. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ .

六、(本题15分) 求证: 常微分方程 $\frac{dy}{dx} = -y^3 + \sin x$ ,  $x \in [0, 2\pi]$ 有唯一的满足 $y(0) = y(2\pi)$ 的解.

(林代数)