[1]

数 学 年 刊
17A: 6(1996),673-678.

特征 2 CARTAN 型李代数的结合型 **

林 磊*

提 要

本文确定了在特征 2 域上的阶化 Cartan 型李代数中 (包括本文作者以前所构造的非交错哈密尔顿代数 $P(n,\mathbf{m})$) 具有非退化结合型的所有李代数.

关键词 结合型, 特征 2, Cartan 型李代数

MR (1991) 主题分类 17B65

中图法分类 O152.5

文 [1] 中, Farnsteiner 讨论了阶化 Cartan 型李代数的结合型, 并确定了其中哪些李代数具有非退化的结合型. 但是他对 H 型和 K 型没有讨论基域的特征数 $p=2$ 时的情形. 事实上当 $p=2$ 时的 H 型和 K 型李代数早已分别由薛小西和林磊作了定义并对它们的性质作了讨论 [3,4,5]. 此外, 林磊还构造了一类新的特征数 $p=2$ 的域上的单李代数, 即非交错哈密尔顿代数 $P(n,\mathbf{m})$, 因为它与哈密尔顿代数 $H(n,\mathbf{m})$ 非常相似, 故而也可把它看作为 Cartan 型李代数. 本文的目的在于讨论在特征 2 的域上的这三类阶化李代数的结合型, 以确定在哪些条件下它们具有非退化的结合型.

本文中, 我们总假设基域 F 的特征数为 2. 文中所用的符号基本上同 [2]. 为了对特征 2 的阶化 Cartan 型李代数的结合型有一个完整的描述, 我们先介绍两个已知的结果.

定理 1[1] 设 $n>1$. 则李代数 $W(n,\mathbf{m})$ 拥有非退化结合型当且仅当 $n=2$.

注 1 当 $n=1$ 时, $W(n,\mathbf{m})$ 不是单李代数. 但若 $m>1$, 则 $W(1,\mathbf{m})^{(1)}$ 是单李代数, 此时 $W(1,\mathbf{m})^{(1)}$ 同构于 $P(1,\mathbf{m})$.

定理 2[1] 设 $n\geq 3$. 则 $S(n,\mathbf{m})$ 具有非退化结合型的充要条件是 $n=3$.

给定 $n\in \mathbb{N}$, $\mathbf{m}=(m_1,\cdots,m_n)\in \mathbb{N}^n$, 令 $\tau=\tau(\mathbf{m})=(2^{m_1}-1,\cdots,2^{m_n}-1)$. $A(n,\mathbf{m})=\langle\{x^{(a)}\mid 0\leq a\leq\tau\}\rangle$. 则 $A(n,\mathbf{m})$ 是一个有限维的除幂代数. 定义映射 D_H : $A(2r,\mathbf{m})\to W(2r,\mathbf{m})$

$$D_H(f)=\sum_{i=1}^{2r}D_i(f)D_{i'},\quad f\in A(2r,\mathbf{m}).$$

则 $B:=\{D_H(x^{(a)})\mid 0<a<\tau\}$ 是 $H(2r,\mathbf{m})$ 的基, 并且我们有以下

本文 1995 年 7 月 4 日收到.

*华东师范大学数学系, 上海 200062.

**国家自然科学基金资助的项目.

定理 3 $H(2r,\mathbf{m})$ 是单李代数的充要条件是 $r\geq 2$, 或者 $r=1$ 并且 $\mathbf{m}\geq\mathbf{2}$.

证 充分性 见 [5, §1, 定理 1].

必要性 当 $r=1$ 且 $\mathbf{m}=\mathbf{1}$ 时, $H(2r,\mathbf{m})$ 是 2 维李代数. 当 $\mathbf{m}=(1,m_2)$, $m_2>1$ 时, $\langle\{D_H(x^{(a)})\mid 0<a<\tau, a_1=0\}\rangle$ 是 $H(2r,\mathbf{m})$ 的真理想, 故 $H(2r,\mathbf{m})$ 不是单李代数. 对 $m=(m_1,1)$, $m_1>1$ 的情形同样讨论. 必要性得证.

设 α_τ 是如 [2] 所定义的线性映射: $A(n,\mathbf{m})\to F$, $\alpha_\tau\Big(\sum\limits_{a\leq\tau}\beta_a x^{(a)}\Big)=\beta_\tau$.

定理 4 设 $r\geq 2$ 或者 $r=1$ 但 $\mathbf{m}\geq\mathbf{2}$. 那么哈密尔顿代数 $H(2r,\mathbf{m})$ 具有非退化的结合型.

证 在 $H(2r,\mathbf{m})$ 上定义双线性型 λ 如下

$$\lambda(D_H(x^{(a)}),D_H(x^{(b)}))=\alpha_\tau(x^{(a)}x^{(b)}),\quad 0<a,b<\tau.$$

则 λ 显然是对称的. 又 $\lambda(D_H(x^{(\varepsilon_1)}),D_H(x^{(\tau-\varepsilon_1)}))=\binom{\tau}{\varepsilon_1}=1$, 故 $\lambda\neq 0$, 从而 λ 非退化. 由 [5] 可知

$$D_H(D_H(x^{(a)})x^{(b)})=[D_H(x^{(a)}),D_H(x^{(b)})]\in D_H\Big(\bigoplus_{c<\tau}Fx^{(c)}\Big).$$

而 $\ker(D_H)=F1$, 故 $\alpha_\tau(D_H(x^{(a)})(x^{(b)}))=0$. 因为 $D_H(x^{(a)})$ 是导子, 所以

$$D_H(x^{(a)})(x^{(b)}x^{(c)})=D_H(x^{(a)})(x^{(b)})x^{(c)}+x^{(b)}D_H(x^{(a)})(x^{(c)}).$$

两边作用 α_τ, 得

$$\alpha_\tau(D_H(x^{(a)})(x^{(b)})x^{(c)})+\alpha_\tau(x^{(b)}D_H(x^{(a)})(x^{(c)}))=0.$$

现在我们来验证 λ 的结合性

$$\begin{aligned}&\lambda([D_H(x^{(a)}),D_H(x^{(b)})],D_H(x^{(c)}))+\lambda(D_H(x^{(b)}),[D_H(x^{(a)}),D_H(x^{(c)})])\\&=\lambda(D_H(D_H(x^{(a)})(x^{(b)})),D_H(x^{(c)}))+\lambda(D_H(x^{(b)}),D_H(D_H(x^{(a)})(x^{(c)})))\\&=\alpha_\tau(D_H(x^{(a)})(x^{(b)})x^{(c)})+\alpha_\tau(x^{(b)}D_H(x^{(a)})(x^{(c)}))\\&=0.\end{aligned}$$

下面我们来讨论 [6] 中所定义的非交错哈密尔顿代数 $P(n,\mathbf{m})$ 的情形. 回忆一下, 除了 $n<4$ 且 $\mathbf{m}=\mathbf{1}$ 的情况外 $P(n,\mathbf{m})$ 都是单李代数, 并且

$$P(n,1)=\langle\{D_P(x^{(a)})\mid 0<a<\tau\}\rangle,$$
$$P(n,\mathbf{m})=\langle\{D_P(x^{(a)})\mid 0<a\leq\tau\}\rangle,$$

若 $\mathbf{m}\neq 1$. 这里, $D_P(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}D_i(f)D_i$, $\forall f\in A(n,\mathbf{m})$.

定理 5 假设当 $\mathbf{m}=1$ 时 $n\geq 4$. 则非交错哈密尔顿代数 $P(n,\mathbf{m})$ 拥有非退化结合型当且仅当 $\mathbf{m}=1$, 或者 $n=1$.

证 设 $P(n,\mathbf{m})=\bigoplus\limits_{i=-1}^{s}P(n,\mathbf{m})_i$ 是其自然阶化. 那么

$$\dim P(n,1)_s=n,$$

而 $\dim P(n,\mathbf{m})_s=1$, 若 $\mathbf{m}\neq 1$.

必要性　若 $P(n,\mathbf{m})$ 拥有非退化结合型，则由 [1] 知，$\dim P(n,\mathbf{m})_{-1} = \dim P(n,\mathbf{m})_s$. 如果 $n>1$ 并且 $\mathbf{m}\neq 1$, 那么

$$\dim P(n,\mathbf{m})_{-1} = n > 1 = \dim P(n,\mathbf{m})_s,$$

故此时 $P(n,\mathbf{m})$ 没有非退化结合型.

充分性　(1) $\mathbf{m}=1$. 此时在 $P(n,1)$ 上定义双线性型 λ 如下

$$\lambda(D_P(x^{(a)}), D_P(x^{(b)})) = a_\tau(x^{(a)}x^{(b)}),\quad 0<a,b<\tau.$$

则 λ 显然是对称的和非退化的. 与 $H(2r,\mathbf{m})$ 的情形证明类似，易知 λ 是 $P(n,1)$ 上的结合型.

(2) $n=1$. 定义 $P(1,\mathbf{m})$ 上的双线性型 λ 为

$$\lambda(D_P(x^{(a)}), D_P(x^{(b)})) = \delta_{\tau,a+b-1},\quad 0<a,b\le\tau.$$

则显然 λ 是对称的且非退化. 下证 λ 的结合性

$$\begin{aligned}
&\lambda([D_P(x^{(a)}), D_P(x^{(b)})], D_P(x^{(c)})) + \lambda(D_P(x^{(b)}), [D_P(x^{(a)}), D_P(x^{(c)})])\\
&= \binom{a+b-2}{a-1}\lambda(D_P(x^{(a+b-2)}), D_P(x^{(c)})) + \binom{a+c-2}{a-1}\lambda(D_P(x^{(b)}), D_P(x^{(a+c-2)}))\\
&= \binom{a+b-2}{a-1}\delta_{\tau,a+b+c-3} + \binom{a+c-2}{a-1}\delta_{\tau,a+b+c-3}\\
&= \left\{\binom{a+b-2}{a-1} + \binom{a+c-2}{a-1}\right\}\delta_{\tau,a+b+c-3}.
\end{aligned}$$

由下面的引理 1, 我们知道以上诸等式中的最后一个等式为 0, 于是 λ 的结合性得证.

引理 1　给定正整数 a,b,c,m. 假设 $a+b+c-3=2^m-1$, 那么

$$\binom{a+b-2}{a-1} + \binom{a+c-2}{a-1} \equiv 0 \pmod 2.$$

证　任给 $d\in I\!N$, 且 $d<2^m$. 设 $d=\sum\limits_{i=0}^{m-1} d_i 2^i$ 是 d 的二进制表达式，则有

$$\binom{a+b-2}{a-1} \equiv \prod_{i=0}^{m-1}\binom{(a+b-2)_i}{(a-1)_i} \pmod 2,$$

$$\binom{a+c-2}{a-1} \equiv \prod_{i=0}^{m-1}\binom{(a+c-2)_i}{(a-1)_i} \pmod 2.$$

如果 $\binom{a+b-2}{a-1}\equiv 1 \pmod 2$, 那么 $\binom{(a+b-2)_i}{(a-1)_i}=1$, $i=0,\cdots,m-1$. 所以,

$$(a+b-2)_i \ge (a-1)_i,\ i=0,\cdots,m-1.$$

此时必有 $(a-1)_i+(b-1)_i=(a+b-2)_i$, $\forall i$. 因为不然的话, 存在 i_1, 使 $(a-1)_{i_1}=(b-1)_{i_1}=1$. 选取 i_1 使其最小，则

$$(a+b-2)_{i_1} = 0 < 1 = (a-1)_{i_1},$$

矛盾！由于

$$a+b+c-3 = 2^m-1 = \sum_{i=0}^{m-1} 2^i,$$

故

$$((a+b-2)+(c-1))_i=1,\quad i=0,\cdots,m-1.$$

于是 $(a+b-2)_i+(c-1)_i=1, \forall i$, 即

$$(a-1)_i+(b-1)_i+(c-1)_i=1.$$

从而

$$(a+c-2)_i=((a-1)+(c-1))_i=(a-1)_i+(c-1)_i\geq(a-1)_i,$$

即

$$\binom{(a+c-2)_i}{(a-1)_i}=1,\quad \forall i.$$

8 所以

$$\binom{a+b-2}{a-1}+\binom{a+c-2}{a-1}\equiv 1+1\equiv 0\pmod 2.$$

如果 $\binom{a+b-2}{a-1}\equiv 0 \pmod 2$, 那么存在 i_1, 使 $\binom{(a+b-2)_{i_1}}{(a-1)_{i_1}}=0$. 取 i_1 最小, 则

$$(a+b-2)_i=(a-1)_i+(b-1)_i,\ i<i_1,$$

而 $(a+b-2)_{i_1}=0$, $(a-1)_{i_1}=(b-1)_{i_1}=1$. 若存在 $i_0<i_1$, 使 $(a+c-2)_{i_0}<(a-1)_{i_0}$, 则 $\binom{(a+c-2)_{i_0}}{(a-1)_{i_0}}=0$, 从而

$$\binom{a+c-2}{a-1}\equiv 0(\operatorname{mod} 2).$$

否则 $(a+c-2)_i\geq(a-1)_i, \forall i<i_1$. 故

$$(a+c-2)_i=(a-1)_i+(c-1)_i,\ \forall i<i_1.$$

而

$$1=(a+b+c-3)_{i_1}=(a+b-2)_{i_1}+(c-1)_{i_1}=(c-1)_{i_1},$$

故 $(a-1)_{i_1}=(c-1)_{i_1}=1$, 于是 $(a+c-2)_{i_1}=0$, 即 $\binom{(a+c-2)_{i_1}}{(a-1)_{i_1}}=0$, 因此

$$\binom{a+c-2}{a-1}\equiv 0\pmod 2.$$

引理得证.

现在我们来讨论接触代数. 我们首先简单地回顾一下接触代数的构造. 设 $n=2r+1$, $\{\mu_i\mid 1\leq i\leq 2r\}\subset F$, 且满足 $\mu_j+\mu_{j'}=1$, $j=1,\cdots,2r$. 定义微分 1- 型

$$\omega=dx_n+\sum_{i=1}^{2r}\mu_i x_i dx_{i'},$$

其中, $x_i:=x^{(\varepsilon_i)}$, $i=1,\cdots,n$. 定义

$$K'(n,\mu_j,\mathbf{m})=\{D\in W(n,\mathbf{m})\mid D\omega=u\omega, u=u(D)\in A(n,\mathbf{m})\},$$

则它是 $W(n,\mathbf{m})$ 的子代数, 且 $K(n,\mu_j,\mathbf{m}):=K'(n,\mu_j,\mathbf{m})^{(1)}$ 是单李代数 (见 [3, 4]). 若令 $D_K: A(n,\mathbf{m})\to K'(n,\mu_j,\mathbf{m})$,

$$D_K(f)=\sum_{j=1}^{2r}(D_{j'}f+\mu_j x^{(\varepsilon_j)}D_n f)D_j+\Big(f+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j x^{(\varepsilon_j)}D_j f\Big)D_n,$$

并在 $A(n,\mathbf{m})$ 上定义李运算

$$[f,g]=\Big(I+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j x^{(\varepsilon_j)}D_j\Big)(f)D_n(g)+\Big(I+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j x^{(\varepsilon_j)}D_j\Big)(g)D_n(f)$$
$$+\sum_{j=1}^{2r}D_j(f)D_{j'}(g).$$

则 $A(n,\mathbf{m})$ 成为一个李代数，并且在 D_K 下，它同构于 $K'(n,\mu_j,\mathbf{m})$. 因此，在以下的讨论中，我们可把 $K(n,\mu_j,\mathbf{m})$ 看成 $A(n,\mathbf{m})$ 的子代数. 由于在讨论非退化结合型时，其结论与定义系数集 $\{\mu_j\}$ 的选取无关. 所以，我们可把 $K(2r+1,\mu_j,\mathbf{m})$ 简记为 $K(2r+1,\mathbf{m})$. 此时，我们有

$$K(2r+1,\mathbf{m})=\begin{cases}\langle\{x^{(a)}\mid 0\le a\le\tau\}\rangle, & 若 r\equiv 1 \pmod 2,\\ \langle\{x^{(a)}\mid 0\le a<\tau\}\rangle, & 若 r\equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

并且，与 $p>2$ 时的 K- 型代数一样，它也是一个阶化代数.

定理 6　接触代数 $K(2r+1,\mathbf{m})$ 有非退化结合型的充要条件为 $r\equiv 1 \pmod 2$.

证　设接触代数 $K(2r+1,\mathbf{m})$ 有非退化结合型 λ, 则 $\lambda|_{K(2r+1,\mathbf{m})_{-2}\times K(2r+1,\mathbf{m})_s}$ 是非退化的，于是

$$\dim K(2r+1,\mathbf{m})_s=\dim K(2r+1,\mathbf{m})_{-2}=1.$$

从而 $r\equiv 1 \pmod 2$, 必要性得证.

反之，若 $r\equiv 1 \pmod 2$, 我们如下定义双线性型 λ:

$$\lambda(x^{(a)},x^{(b)})=\alpha_\tau(x^{(a)}x^{(b)}),\quad 0\le a,b\le\tau.$$

则有

$$\begin{aligned}&\lambda([x^{(\varepsilon_n)},x^{(a)}],x^{(b)})+\lambda(x^{(a)},[x^{(\varepsilon_n)},x^{(b)}])\\
&=\Big(1+a_n+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j a_j\Big)\lambda(x^{(a)},x^{(b)})+\Big(1+b_n+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j b_j\Big)\lambda(x^{(a)},x^{(b)})\\
&=\Big(a_n+b_n+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j(a_j+b_j)\Big)\alpha_\tau(x^{(a)}x^{(b)})\\
&=\Big(a_n+b_n+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j(a_j+b_j)\Big)\binom{a+b}{a}\delta_{\tau,a+b}\\
&=\Big(\tau_n+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j\tau_j\Big)\delta_{\tau,a+b}=\Big(1+\sum_{j=1}^{2r}\mu_j\Big)\delta_{\tau,a+b}\\
&=(1+r)\delta_{\tau,a+b}\quad (因为 \mu_j+\mu_{j'}=1, j=1,\cdots,2r)\\
&=0.\end{aligned}$$

令 $R=\{\varepsilon_i+\varepsilon_j\mid 1\le i,j\le 2r\}\cup\{\varepsilon_i\mid 1\le i\le 2r\}$. 由于

$$\operatorname{ad}x^{(2\varepsilon_i)}=x^{(\varepsilon_i)}D_{i'}+x^{(2\varepsilon_i)}D_n,\quad \operatorname{ad}x^{(\varepsilon_i)}=D_{i'}+\mu_{i'}x^{(\varepsilon_i)}D_n,$$
$$\operatorname{ad}x^{(\varepsilon_i+\varepsilon_j)}=x^{(\varepsilon_i)}D_{j'}+x^{(\varepsilon_j)}D_{i'}+(1+\mu_i+\mu_j)x^{(\varepsilon_i+\varepsilon_j)}D_n,\quad 1\le i\ne j\le 2r.$$

令 $S=\{x^{(\varepsilon_i)}D_{i'}+x^{(2\varepsilon_i)}D_n,\ x^{(\varepsilon_i)}D_{j'}+x^{(\varepsilon_j)}D_{i'}+(1+\mu_i+\mu_j)x^{(\varepsilon_i+\varepsilon_j)}D_n \mid 1\le i\ne j\le 2r\}\cup\{D_{i'}+\mu_{i'}x^{(\varepsilon_i)}D_n \mid 1\le i\le 2r\}$. 则 $\mathrm{ad}x^{(a)}\in S,\ \forall a\in R$. 注意到 $\forall D\in S$, $\alpha_\tau(D(x^{(b)}))=0,\ 0\le b\le\tau$, 故

$$
\begin{aligned}
&\lambda([x^{(a)},x^{(b)}],x^{(c)})+\lambda(x^{(b)},[x^{(a)},x^{(c)}])\\
&=\lambda(\mathrm{ad}x^{(a)}(x^{(b)}),x^{(c)})+\lambda(x^{(b)},\mathrm{ad}\,x^{(a)}(x^{(c)}))\\
&=\alpha_\tau(D_K(x^{(a)})(x^{(b)})x^{(c)})+\alpha_\tau(x^{(b)}D_K(x^{(a)})(x^{(c)}))\\
&=\alpha_\tau(D_K(x^{(a)})(x^{(b)}x^{(c)}))=0,\quad a\in R.
\end{aligned}
$$

于是 λ 是 $K(2r+1,\mathbf{m})_0\oplus K(2r+1,\mathbf{m})_{-1}$ 不变的. 从而由 [2] 得 λ 是结合型. 而 $\lambda\ne 0$, 故 λ 非退化.

参 考 文 献

[1] Farnsteiner, R., The associative form of the graded Cartan type Lie algebras, *Tran. Amer. Math. Soc.*, **295** (1986), 417-427.

[2] Strade, H. & Farnsteiner, R., Modular Lie algebras and their representations, Marcel Dekker, Inc. New York and Basel, 1988.

[3] 林 磊, 特征 $p=2$ 的域上的 Cartan 型李代数 $K(\mathcal{F},\mu_i)$ 及其子代数, 华东师范大学学报 (自然科学版), **1** (1988), 16-23.

[4] Zhang Yongzheng & Lin Lei, Lie algebra $K(n,\mu_j,\mathbf{m})$ of Cartan type of characteristic $p=2$, *Chin. Ann. of Math.*, **13B**:3 (1992), 315-326.

[5] 薛小西, Cartan 型 Lie 代数 $H_n(\mathcal{F})$, $K_n(\mathcal{F})$ 当特征等于 2 时的结构, 硕士学位论文, 中国科技大学研究生院, 1983.

[6] Lin Lei, Non-alternating Hamiltonian algebra $P(n,\mathbf{m})$ of characteristic two, *Comm. Algebra*, **21**:2 (1993), 399-411.