一九八八年 华东师范大学学报(自然科学版) No. 1
第一期 Journal of East China Normal University (Natural Edition) 1988

特征 $p=2$ 的域上的 Cartan 型李代数 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 及其子代数

林 磊
(数学系)

提 要

本文在特征 $p=2$ 的域 F 上构造了一类 Cartan 型 K 型李代数 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$，其中 $\mathscr{F}$ 是某个 flag，$\{\mu_i\}$ 是一组参数。并且证明了当对 $\{\mu_i\}$ 加上适当限制条件之后，$K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 或者它的导代数是单代数。另外，本文还通过讨论 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 的零次项代数 L_0 及其理想，构造了两类单子代数 G 和 L'，并计算了它们的维数。

关键词：特征 $p=2$　Cartan 型　单李代数　K-型

引 言

特征 $p\neq 2$ 时的 Cartan 型李代数已讨论得很透彻了，其主要结果可参见[2]。$p=2$ 时，目前所见的论文仅有[3]，且[3]中讨论的只是一种很特殊的情况，本文的目的是要讨论比[3]更广泛的一类 K-型代数 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$，它包含了[3]中所讨论的情况。本文得到了在适当的条件下李代数 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 自身或其导代数是单代数的结论，并且它们恰好与[1]中定义的 Σ^* 或 $\tilde{\Sigma}$ 同构。在§2中，我们对 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 的零次项代数 L_0 的理想及 L_0 进行了讨论，指出了特征 $p=2$ 与 $p>2$ 时的 K-型代数有着很大的差别。在§3中我们构造了 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 的两类单子代数。

本文的讨论总是在任一取定的基域 F 上进行的，其中 F 的特征 $p=2$。

$K(\mathscr{F}, \mu)$ 的构造及其单性

设 E 是域 F 上的 n 维向量空间，$n=2m+1\geqslant 3$，$\{x_i\}$ 是 E 的一组基，$O(E)$ 是 E 上的除幂代数，设

$$\omega=dx_n+\sum_{i=1}^{n''}\mu_i x_i dx_{i'},$$

其中 $n''=2m$，参数 $\mu_i\in F$，$i=1, \cdots, n''$。$i'=\begin{cases} i+m & 若\ 1\leqslant i\leqslant m \\ i-m & 若\ m<i\leqslant n''。\end{cases}$ 设 $\mathscr{F}$ 是 E 的一个与基 $\{x_i\}$ 相容的标准 flag，简记为 flag，即：

本文于 1986 年 11 月 20 日收到。

$$\mathscr{F}: E=E_0\supseteq E_1\supseteq\cdots\supseteq E_k\supset E_{k+1}=0$$

$O(\mathscr{F})$ 是由 $\mathscr{F}$ 所定义的除幂代数，$K(\mathscr{F}, \omega)=\{D\in W(\mathscr{F})\mid D\omega=u\omega,\ u=u(D)\in O(\mathscr{F})\}$，(参见[2])。在本文中我们常以 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 记 $K(\mathscr{F}, \omega)$。设 π_i 是使 $x_i^{(\pi_i)}\in O(\mathscr{F})$，$x_i^{(\pi_i+1)}\overline{\in} O(\mathscr{F})$ 的自然数，则 $\pi_i=2^{s_i}-1\geqslant 1$。我们首先讨论 $\{\mu_i\}$ 满足下列(*)条件的情况。

$$\mu_i+\mu_{i'}=1,\quad i=1, \cdots, n'' \tag{*}$$

任取 $D=\sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i\in K(\mathscr{F}, \mu_i)$，其中 $f_i\in O(\mathscr{F})$，$i=1, \cdots, n$。则从 $D\omega=u\omega$ 得：

$$f_n=f+\sum_{j=1}^{n'}\mu_i x_i\partial_i f,\ f_j=\partial_{j'}f+\mu_j x_j\partial_n f,\ j=1, \cdots, n'' \tag{1}$$

其中

$$f=f_n+\sum_{i=1}^{n''}\mu_j x_j f_{j'} \tag{2}$$

按照公式(2)，任取 $D\in K(\mathscr{F}, \mu_i)$，可定义 $f\in O(\mathscr{F})$，从而有映射

$$\varphi: K(\mathscr{F}, \mu_i)\to O(\mathscr{F}),\quad D=\sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i\mapsto f$$

φ 显然是线性映射，可以验证它其实是向量空间的同构，任取 $f\in O(\mathscr{F})$，按(1)可定义一个 $D=\sum_{i=1}^{n} f_i\partial_i\in K(\mathscr{F}, \mu_i)$。$f\mapsto D$ 是 φ 的逆映射，所以对每个 $D\in K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 可唯一写成 D_f 的形式，$f\in O(\mathscr{F})$。

设 $[D_f, D_g]=D_w$ 则直接计算得：

$$w=\Big(1+\sum_{j=1}^{n''}\mu_j x_j\partial_j\Big)(f)\partial_n(g)+\Big(1+\sum_{j=1}^{n''}\mu_j x_j\partial_j\Big)(g)\partial_n(f)+\sum_{j=1}^{n''}\partial_j(f)\partial_{j'}(g) \tag{3}$$

所以，我们可以在 $O(\mathscr{F})$ 中引入李运算：$[f, g]=w$，任取 $f, g\in O(\mathscr{F})$ 其中 w 由(3)给出，则作为李代数，$O(\mathscr{F})\cong K(\mathscr{F}, \mu_i)$。所以，我们常把 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 中的元 D_f 简记为 f。

设 $k=(k_1, \cdots, k_{n''})$，$e_i=(\delta_{i1}, \cdots, \delta_{in''})$，$0\leqslant k_i\leqslant\pi_i$，$i=1, \cdots, n''$，$\pi=(\pi_1, \cdots, \pi_{n''})$，令 $x^k=x_1^{(k_1)}\cdots x_n^{(k_{n''})}$，我们有

定理 1 设 $\pi_n>1$，则当 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，$K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 是单代数，当 $m\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时 $D(K(\mathscr{F}, \mu_i))=[K(\mathscr{F}; \mu_i), K(\mathscr{F}, \mu_i)]$ 是单的，且

$$D(K(\mathscr{F}, \mu_i))=\widetilde{K}(\mathscr{F}, \mu_i)=\langle x^k x_n^{(k_n)}/(k, k_n)\neq(\pi, \pi_n)\rangle。$$

证明 对 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$：设 I 是 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 的任一非零理想，任取 $0\neq f\in I$，设

$$f=f_0x_n^{(t)}+f_1x_n^{(t-1)}+\cdots f_t,$$

其中 f_i 不含 x_n，$i=0, \cdots, t$，$f_0\neq 0$。若 $t>0$，则 $I\ni[f, 1]=f_0x_n^{(t-1)}+\cdots\neq 0$，故可设 $t=0$，即 f 不含 x_n，同理可设 f 不含所有 x_i，$i\leqslant n''$。所以 $1\in I$。若 $k_n<\pi_n$，则

$$x^k x_n^{(k_n)}=[x^k x_n^{(k_n+1)}, 1]\in I。$$

特别由于 $\pi_n>1$，故 $x_i\in I$，任取 $i\leqslant n$。若 $k_i<\pi_i$，则

$$x^k x_n^{(k_n)}=[x^{k+e_i}x_n^{(k_n)}, x_{i'}]+\mu_i x_{i'}(x^{k+e_i}x_n^{(k_n-1)})\in I,$$

又 $[x^\pi x_n^{(\pi_n)}, x_n]=x^\pi x_n^{(\pi_n)}$，故 $x^\pi x_n^{(\pi_n)}\in I$。因此 $I=K(\mathscr{F}; \mu_i)$，即 $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 是单的。

对 $m\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$：先证 $D(K(\mathscr{F}, \mu_i))=\widetilde{K}(\mathscr{F}, \mu_i)$。上面的证明已蕴含了 $\widetilde{K}(\mathscr{F}, \mu_i)\subseteq D(K(\mathscr{F}, \mu_i))$。又对任意的 $l=(l_1, \cdots, l_{n''})$ 和 l_n，$0\leqslant l_i\leqslant\pi_i$，$i=1, \cdots, n$，

$$[x^k x_n^{(k_n)},\ x^l x_n^{(l_n)}]=\left(1+\sum_{j=1}^{n''} k_j\mu_j\right) x^k x_n^{(k_n)} x^l x_n^{(l_n-1)}+\left(1+\sum_{j=1}^{n'} l_j\mu_j\right) x^l x_n^{(l_n)} x^k x_n^{(k_n-1)}$$
$$+\sum_{j=1}^{n''} x^{k-e_j} x_n^{(k_n)} x^{l-e_{j'}} x_n^{(l_n)},$$

通过计算等式右端 $x^\pi x_n^{(\pi_n)}$ 项的系数可知 $x^\pi x_n^{(\pi_n)}$ 在右边不出现，所以

$$D(K(\mathscr{F};\ \mu_i))=\bar{K}(\mathscr{F},\ \mu_i)。$$

单性的证明与前面类似。□

注：把公式(3)与[1]中的公式(1.26)加以比较，可知两者十分相似，事实上，在[1]中若取 $p=2$，并取 $G=m=s_i=e_{i'}=0$，则定义1.2中的 Σ^* 与 $K(\mathscr{F},\ \mu_i)$ 同构，其中 $m\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$。当 $m\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，定义1.3中的 $\tilde{\Sigma}$ 同构于 $\bar{K}(\mathscr{F};\ \mu_i)$。

对 $\{1,\ \cdots,\ n'\}$ 的任一子集 J，令 $J'=\{j'|j\in J\}$。我们讨论一般的形式：

$$\omega=dx_n+\sum_{j=1}^{n''}\mu_j x_j dx_{j'},$$

$\{\mu_i\}$ 满足：存在 $\{1,\ \cdots,\ n''\}$ 的两个互补不交集 $J,\ \bar{J}$，且 $J=J'$，$\bar{J}=\bar{J}'$，使

$$\mu_j+\mu_{j'}=1,\ \forall j\in J\quad \mu_j=\mu_{j'}=1,\ \forall j\in\bar{J} \tag{**}$$

ω 的两个极端情况是 (i) $\bar{J}=\phi$，这时 $\{\mu_i\}$ 满足(*)，(ii) $J=\phi$，此时的 $K(\mathscr{F},\ \omega)$ 的结构在[3]中已给出，可见(**)中的 ω 的确比[3]中的形式更一般些。以下均设 $\{\mu_i\}$ 满足(**)，仍以 $K(\mathscr{F},\ \mu_i)$ 记 $K(\mathscr{F};\ \omega)$。

任取 $D=\sum f_i\partial_i\in K(\mathscr{F},\ \mu_i)$，则与(*)情况类似地，可得：

$$f_j=\partial_{j'}f+\mu_j x_j\partial_n f,\ \forall j\in J;\quad \partial_j f=x_{j'}\partial_n f,\ \forall j\in\bar{J} \tag{4}$$

其中 f 的定义如(2)。令 $I=\{\sum f_i\partial_i|f=0\}\subseteq K(\mathscr{F},\ \mu_i)$，则可验证 I 是 $K(\mathscr{F},\ \mu_i)$ 的理想，象前面一样定义线性映射 φ：$K(\mathscr{F},\ \mu_i)\to O(\mathscr{F})$，$\sum f_i\partial_i\mapsto f$，则 $\ker\varphi=I$。所以作为向量空间，$K(\mathscr{F},\ \mu_i)/I\cong\varphi(K(\mathscr{F},\ \mu_i))$。由于左边的商仍是个李代数，所以我们可在 $\varphi(K(\mathscr{F},\ \mu_i))$ 中定义李运算。

命题1 在上述定义下，我们有：任给 $f,\ g\in\varphi(K(\mathscr{F},\ \mu_i))$

$$[f,\ g]=(1+\sum_{j\in J}\mu_j x_j\partial_j)(f)\partial_n(g)+(1+\sum_{j\in J}\mu_j x_j\partial_j(g)\partial_n(f)+\sum_{j\in\bar{J}}\partial_j(g)\partial_{j'}(f) \tag{5}$$

证明：$\forall f,g\in\varphi(K(\mathscr{F},\mu_i))$，则由(4)，$\partial_j f=x_{j'}\partial_n f,\ j\in J'$。设 $D\langle f\rangle=\sum_{j\in J}f_j\partial_j+f_n\partial_n$，其中

$$f_j=\partial_{j'}f+\mu_j x_j\partial_n f,\ j\in J,\quad f_n=f+\sum_{j\in J}\mu_j x_j\partial_j f,$$

则显然 $D\langle f\rangle\in K(\mathscr{F},\ \mu_i)$，且 $\varphi(D\langle f\rangle)=f$。设 $[D\langle f\rangle,\ D\langle g\rangle]=\sum_{i=1}^{n}w_i\partial_i$，则由直接计算得：公式(5)的右边 $=w$，所以

$$[f,\ g]=[\varphi(D\langle f\rangle),\ \varphi(D\langle g\rangle)]=\varphi[D\langle f\rangle,\ D\langle g\rangle]=\varphi\left(\sum_{i=1}^{n}w_i\partial_i\right)=w,$$

得(5)。

引理1 $\varphi(K(\mathscr{F},\ \mu_i))=\langle aY_r|a\in O(\mathscr{F})$，且 a 不含 x_n 以及所有 $x_j,\ j\in J'$，$\langle 0\leqslant r\leqslant\pi_n\rangle$。其中

$$Y_r=\sum_{s=0}^{r}X_{r-s}x_n^{(s)},\ 0\leqslant r\leqslant\pi_n,\ X_t=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_t\in J\\ i_1<\cdots<i_t\leqslant m}}\prod_{j=1}^{t}x_{i_j}x_{i'_j},\ 0<t\leqslant|\bar{J}|/2,\ X_0=1,$$
$$X_t=0,\quad t>|J'|/2。$$

证明 与[3]中的证明相似，略。□

定理 2 设 $\omega=dx_n+\sum_{i=1}^{n''}\mu_i x_i dx_{i'}$，参数满足(**)，$J\neq\phi$，则 $K(\mathscr{F},\omega)/I\cong K(\mathscr{F}',\omega')$，其中 $\omega'=dx_n+\sum_{j\in J}\mu_j x_j dx_{j'}$，满足条件(*)，$\mathscr{F}'$ 是由 $\mathscr{F}$ 去掉相应的基元 x_j，$\forall j\in\bar{J}$ 所得到的关于 E' 的 flag，其中 E' 是以 $\{x_n, x_j|j\in J\}$ 为基的 E 的子空间，I 的定义如前。

证明 我们已有 $K(\mathscr{F},\omega)/I\cong\varphi(K(\mathscr{F},\omega))$。由引理 1 知 $\varphi(K(\mathscr{F},\omega))$ 以 aY_r 为生成元，$0\leqslant r\leqslant\pi_n$，$a\in O(\mathscr{F})$，$a$ 不含 x_n 及所有 x_j，$j\in\bar{J}$。现在我们定义一个新的映射

$$\psi:\ \varphi(K(\mathscr{F};\mu_i))\to K(\mathscr{F}',\omega'),\ \Sigma a_r Y_r\mapsto\Sigma a_r x_n^{(r)}。$$

按前面的讨论，我们可把 $O(\mathscr{F}')$ 与 $K(\mathscr{F}',\omega')$ 等同，所以这一定义是有意义的，由 Y_r 的定义知 ψ 是单一的线性映射，而 ψ 的满射性是显然的，所以 ψ 是线性空间的同构，故只要证

$$\forall f=aY_r,\ g=bY\in\varphi(K(\mathscr{F},\omega)),\ \psi[f,g]=[\psi f,\psi g]$$

即可，利用

$$(aY_r)(bY_s)=\binom{r+s}{r}\overline{ab}Y_{r+s}$$

以及 $\partial_n Y_r=Y_{r-1}$，通过验算即可得 $\psi[f,g]=[\psi f,\psi g]$，得定理 2。□

L_0 的 理 想

在本文以后的讨论中，我们只考虑满足(*)条件的李代数 $K(\mathscr{F},\mu_i)$。定义

$$\deg x^k x^{(k_n)}=\sum_{i=1}^{n''}k_i+2k_n,$$

其中 $k=(k_1,\cdots,k_{n''})$。$L_j=\langle x^k x^{(k_n)}|\deg x^k x^{(k_n)}=j+2\rangle$。则 $K(\mathscr{F},\mu_i)$ 是阶化子代数，

$$K(\mathscr{F},\mu_i)=\bigoplus_{j\geqslant-2}L_j。$$

我们知道，$p>2$ 时，$K(\mathscr{F},\omega)$ 的零次项代数 $L_0\cong\mathrm{csp}_{n''}=\mathrm{sp}_{n''}\oplus F$，但对 $p=2$，我们一般不能得到这一结果，这一方面由于存在 i，使 $x_i^{(2)}\overline{\in}O(\mathscr{F})$，$i\leqslant n''$。从而使 $\dim L_0<\dim\mathrm{sp}_{n''}$，另一方面，即使 $x_i^{(2)}\in O(\mathscr{F})$，$\forall i\leqslant n''$，我们也不能得到这一结果，设 $\pi_i>1$，$i=1,\cdots,n''$，则 $L_0=\langle x_n, x_i^{(2)}, x_i x_j|i, j\leqslant n''\rangle$，易见 $D(L_0)=\langle x_i^{(2)}, x_i x_j|i, j\leqslant n''\rangle\cong\mathrm{sp}_{n''}$，$\mathrm{sp}_{n''}$ 有一维的中心，设 $z=\sum_{i=1}^{n}x_i x_{i'}$，则 z 是 $D(L_0)$ 的中心，由于

$$[x_n, x_i x_j]=(1+\mu_i+\mu_j)x_i x_j,\ [x_n, x_j^{(2)}]=x_j^{(2)},\ i, j\leqslant n'' \tag{6}$$

从而 $[x_n, z]=0$，故 z 在 L_0 的中心中，若 $L_0\cong\mathrm{csp}_{n''}$，则 L_0 中有不在 $D(L_0)$ 中的中心元存在，但这是不可能的，因为若存在 $x\in D(L_0)$，使 $[x_n+x, y]=0$，$\forall y\in L_0$。所以 $[x_n+x, x_j^{(2)}]=0$，即 $x_j^{(2)}=[x_n, x_j^{(2)}]=[x, x_j^{(2)}]$，由于 $x, x_j^{(2)}\in D(L_0)$，故 $[x, x_j^{(2)}]\in D^2(L_0)$，但显然 $x_j^{(2)}\overline{\in}D^2(L_0)$，所以这样的 x 不存在，故我们有

命题 2 对任意的 flag $\mathscr{F}$，$L_0\neq\mathrm{csp}_{n''}$。

命题 2 使我们看到了 $p=2$ 与 $p>2$ 时的 K-型 Cartan 型李代数有着很大的差异，这也就是我们要讨论 $p=2$ 时的 K-型代数的原因所在。

设 I 是 L_0 的子代数，定义 $L'(I)=\bigoplus_{j\geqslant-2}L'_j$，它是 $L=K(\mathscr{F},\mu_i)$ 的阶化子代数，满足

$L'_i=L_i,\ i<0,\ L'_0=I,\ L'_i=\{x\in L_i\mid [xL_{-1}]\subseteq L'_{i-1}\}\forall i>0\}$。

命题3 对 $D(L_0)$ 中的任一子代数 I, 设 $L'(I)=\bigoplus_{j\geq -2}L'_j$, 则 L'_j 都不含 x_n, $\forall j$。

证明 命题对 $j\leqslant 0$ 时显然成立, 对一般的 j, 我们对 j 进行归纳, 分 j 是奇数与偶数分别加以考虑, 并注意到 $\partial_i\partial_j=\partial_j\partial_i$, $\forall i,\ j\leqslant n$ 以及 ω 满足条件(*)即可证明该命题。□

本命题中的 $D(L_0)$ 可换成 $H=\langle x_s^{(2)},\ x_ix_j\mid i,\ j\leqslant n'',s\in S\rangle$, 其中 $S=\{s\leqslant n''\mid x_s>1\}$。

由于命题3, 当 I 取在 H 中时 L_{-2} 就落在 $L'(I)$ 的中心里, 所以可作商 $L'(I)/L_{-2}=\tilde{L}'(I)$, $\tilde{L}'(I)$ 实际上成了 H-型代数 $\tilde{H}_{n''}$ 的子代数, 即 I 的"Cartan Prolongation"(参见[3]), 因为这里的 H 实际上就是 H-型代数 $\tilde{H}_{n''}$ 的零次项代数。现令 $x'_n=x_n+\sum_{i=1}^{m}\mu_ix_ix_{i'}$, 则

定理3 假设 $m>2$, 我们有:

(i) 若 $S\cap S'\neq\phi$, 则 $D(L_0)=H$, L_0 的非凡理想都是 H 的非凡理想或 H 自身。

(ii) 若 $S\cap S'=\phi$, 则 $D(L_0)=J_0+\langle x_s^{(2)},\ s\in S\rangle$, L_0 的不含在 H 中的非凡理想具有形式

$$\langle x'_n+ax_1x_{1'}\rangle+\langle x_s^{(2)},\ s\in S\rangle+J_0,\ \text{其中}\ a\in F,\ J_0=\langle x_ix_j,\ x_ix_{i'}+x_jx_{j'},\ i,\ j\leqslant n'',\ i\neq j'\rangle$$

证明 (i) 因为 $\exists i\in S\cap S'$, 故 $x_ix_{i'}=[x_i^{(2)},\ x_{i'}^{(2)}]\in D(L_0)$, 故 $D(L_0)=H$ 是显然的, 设 I 是 L_0 的理想, $I\not\subseteq H$, 则 $\exists x=x'_n=x'\in I$, 使 $x'\in H$。则 $I\ni x_s^{(2)}+x(s)=[x,\ x_s^{(2)}]$, $\forall s\in S$。其中 $x(s)=[x',\ x_s^{(2)}]$。我们可设 $x(s)\in J_0$, 因为设

$$x(s)=\sum_{i<j\leqslant m}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i<j\leqslant m}a_{i'j}x_{i'}x_j+\sum_{i,j\leqslant m}a_{ij'}x_ix_{j'},$$

则

$$[x'_n,\ x_s^{(2)}+x(s)]=x_s^{(2)}+[x'_n,\ x(s)]=x_s^{(2)}+\sum_{i<j\leqslant m}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i,j\leqslant m}a_{i'j'}x_{i'}x_{j'}$$
$$=x_s^{(2)}+x'(s)\in I,\quad \forall i\in s$$

所以我们只要以 $x'(s)$ 代 $x(s)$ 即可, 由于 $\exists i\in S\cap S'$, 不妨设 $i=1$, 则

$$[x_1^{(2)}+\sum_{i<j\leqslant m}a_{ij}x_ix_j+\sum_{i<j\leqslant m}a_{i'j'}x_{i'}x_{j'},\ x_{1'}^{(2)}]=x_1x_{1'}+\sum_{1<j\leqslant m}a_{1j}x_jx_{1'}\in I$$

故
$$[x_1x_{1'}+\sum_{1<j\leqslant m}a_{1j}x_jx_{1'},\ x_{1'}x_k]=x_{1'}x_k\in I。\ k\leqslant m。$$

由于 $m>2$, $x_{1'}x_k$ 所生成的理想包含 J_0, 故 $J_0\subseteq I$, 又 $x(s)\in J_0$, 从而 $x_s^{(2)}\in I\forall s\in S$, 所以 $x_1x_{1'}\in I$。从而 $I=L_0$。

对(ii), 显然 $\langle x'_n+ax_1x_{1'}\rangle+J_0+\langle x_s^{(2)},\ s\in S\rangle$ 是 L_0 的理想, 由于 $S\cap S'=\phi$, 故 $x_ix_{i'}\overline{\in}D(L_0)$, 从而 $D(L_0)=J_0+\langle x_s^{(2)},s\in S\rangle$。若 I 是 L_0 的理想 $I\not\subseteq H$, 则 $\exists x=x'_n+x'\in I$, $x'\in H$, 因而 $I\ni[x_s^{(2)},\ x]=x_s^{(2)}+x(s)$, $x(s)=[x_s^{(2)},\ x']\in J_0$, $\forall s\in S$。又因 H 的不等于中心 $\langle z\rangle$ 的理想均包含 J_0, 故 $J_0\subseteq I$, 从而 $x(s)\in I$, 所以 $x_s^{(2)}\in I$, $\forall s\in S$。即 $D(L_0)\subseteq I$, 所以可设

$$x=x'_n+ax_1x_{1'}\in I$$

若 $\exists b\in F$, $b\neq a$, 使 $x'_n+bx_1x_{1'}\in I$, 则 $x_1x_{1'}\in I$, 因此 $I=L_0$, 否则

$$I=\langle x'_n+ax_1x_{1'}\rangle+J_0+\langle x_s^{(2)},\ s\in S\rangle。\ \square$$

从本定理知, L_0 的理想除少数特殊情况外, 都是 H 的理想。

$K(\mathscr{F}, \mu_i)$ 的两类单子代数

在下面的讨论中，设 $m=2$, $\pi_i=1$, $i\leqslant 4$。令

$$I=\langle x_1x_{2'},\ x_{1'}x_2,\ x_1x_{1'}+x_2x_{2'},\ x_n+(1+\mu_1+\mu_2)x_1x_{1'}\rangle$$

是 L_0 的理想，令 $L'(I)=\bigoplus_{i\geqslant -2} L'_i$ 是 I 的"Cartan Prolongation"。则通过计算可知，

$$L'(I)=\bigoplus_{i=-2}^{2\pi_n} L'_i,$$

其中 $L'_{-2}=\langle 1\rangle$, $L'_{-1}=\langle x_i \mid i\leqslant 4\rangle$, $L'_0=I$, $L'_{2i-1}=\langle (x_n^{(i)}+\mu_{2'}x_2x_{2'}x_n^{(i-1)})x_1,$

$$(x_n^{(i)}+\mu_{1'}x_1x_{1'}x_n^{(i-1)})x_2,\quad (x_n^{(i)}+\mu_2x_2x_2x_n^{(i-1)})x_{1'},\quad (x_n^{(i)}+\mu_1x_1x_{1'}x_n^{(i-1)})x_{2'}\rangle,$$

$$1\leqslant i\leqslant \pi_n,$$

$$L'_{2i}=\langle x_1x_2x_n^{(i)},\quad x_{1'}x_{2'}x_n^{(i)},\quad (x_1x_{1'}+x_2x_{2'})x_n^{(i)}+(\mu_1+\mu_2)x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(i-1)},$$

$$x_n^{(i+1)}+(1+\mu_1+\mu_2)x_1x_{1'}x_n^{(i)}+\mu_2\mu_{2'}x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(i-1)}\rangle,\quad 1\leqslant i<\pi_n,$$

$$L'_{2\pi_n}=\langle x_1x_2x_n^{(\pi_n)},\ x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n)},\ (x_1x_{1'}+x_2x_{2'})x_n^{(\pi_n)}+(\mu_1+\mu_2)x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n-1)}\rangle。$$

所有这些生成元组成了 $L'(I)$ 的一组基，所以 $\dim_F L'(I)=2^{\pi_n+3}$。直接验算得：

$$D(L'(I))=\bigoplus_{i=-2}^{2\pi_n-1} L'_i+\langle (x_1x_{1'}+x_2x_{2'})x_n^{(\pi_n)}+(\mu_1+\mu_2)x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n-1)}\rangle$$

$$=\bigoplus_{i=-2}^{2\pi_n} G_i=G。$$

定理 4 当 $\pi_n>1$ 时，G 是单李代数，且 $\dim G=2^{\pi_n+3}-2$。

证明 设 I' 是 G 的任意非零理想，$\forall 0\neq f\in I'$，设 $f=\sum_{i\geqslant -2}^{q} f_i$, $f_i\in G_i$, $f_q\neq 0$。若 $q\neq -2$，则或 f_q 中含 x_n，则 $f'=[f, 1]\in I$，或 f_q 中不含 x_n，此时必存在 $i\leqslant n''$，使 $f'=[f, x_i]\in I$，且两个 f' 都非零，设 $f'=\sum_{i\geqslant -2}^{q'} f'_i$, $f'_i\in G_i$，且 $f'_{q'}\neq 0$，则 $q'<q$，从而 $1\in G$，所以

$$\bigoplus_{i\geqslant -2}^{2\pi_n-3} G_i+\langle (x_1x_{1'}+x_2x_{2'})\cdot x_n^{(\pi_n-1)}+(\mu_1+\mu_2)x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n-2)}\rangle=[1, G]\subseteq I',$$

又因 $x_1x_{2'}$, $x_{1'}x_2\in I'$，所以

$$x_1x_{2'}x_n^{(\pi_n-1)}=[x_1x_{2'},\ x_n^{(\pi_n)}+(1+\mu_1+\mu_2)x_1x_{1'}x_n^{(\pi_n-1)}+\mu_2\mu_{2'}x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n-2)}]\in I',$$

同理 $x_{1'}x_2x_n^{(\pi_n-1)}\in I$，又 $(x_2+\mu_{2'}x_2x_{2'})x_1\in I'$，再从

$$[(x_n+\mu_{2'}x_2x_{2'})x_1,\ (x_n^{(\pi_n-1)}+\mu_2x_2x_{2'}x_n^{(\pi_n-2)})x_{1'}]$$

$$=x_n^{(\pi_n)}+(1+\mu_1+\mu_2)x_1x_{1'}x_n^{(\pi_n-1)}+\mu_2\mu_{2'}x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n-2)}$$

$$+\mu_{2'}((x_1x_{1'}+x_2x_{2'})x_n^{(\pi_n-1)}+(\mu_1+\mu_2)x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n-2)})$$

以及

$$[(x_n+\mu_{2'}x_2x_{2'})x_1,\ x_{1'}x_2x_n^{(\pi_n-1)}]=(x_n^{(\pi_n)}+\mu_{1'}x_1x_{1'}x_n^{(\pi_n-1)})x_2,$$

$$[(x_n+\mu_{2'}x_2x_{2'})x_1,\ (x_n^{(\pi_n)}+\mu_2x_2x_{2'}x_n^{(\pi_n-1)})x_{1'}]$$

$$=(x_1x_{1'}+x_2x_{2'})x_n^{(\pi_n)}+(\mu_1+\mu_2)x_1x_2x_{1'}x_{2'}x_n^{(\pi_n-1)}$$

得 $I'=G$。

定义：设 $s_n>1$, $s_n+1\leqslant s_i$, m 是奇数，令 $L'=\langle x^e z^{(l)} \mid 0\leqslant l\leqslant \pi_n,\ e\in B\rangle\subseteq K(\mathscr{F}, \mu_i)$，其中

$$B=\{e\,|\,e=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon'_{n''}),\ \varepsilon_i=0\text{ 或 }1\},\quad x^e=\prod_{i=1}^{n''}x_i^{(\varepsilon_i)},\quad z^{(l)}=\sum_{j=0}^{l}x_n^{(l-j)}\Sigma^{(j)},$$

其中 $\Sigma^{(k)}=\sum\limits_{i_1+\cdots+i_{n''}=k}x_1^{(2i_1)}\cdots x_n^{(2i_{n''})}$, $0\leqslant l,\ k\leqslant\pi_n$。再设

$$\binom{e+e'}{e}=\prod_{i=1}^{n''}\binom{\varepsilon_i+\varepsilon'_i}{\varepsilon_i},\ e,\ e'\in B。\ e'=(\varepsilon'_1,\cdots,\varepsilon'_{n''})。$$

定理5 L' 是 $K(\mathscr{F},\mu_i)$ 的子代数，并且 L' 是单代数。

证明 首先我们有以下的性质：

(i) $z^{(k)}z^{(l)}=\binom{k+l}{k}z^{(k+l)}$。

(ii) $\partial_n(z^{(k)})=z^{(k-1)}$。

(iii) $\partial_i(z^{(k)})=x_iz^{(k-1)}$, $i\leqslant n''$。

(iv) $(x^ez^{(k)})(x^{e'}z^{(l)})=\binom{e+e'}{e}\binom{k+l}{k}x^{e+e'}z^{(k+l)}$。

从而可知 L' 是 $K(\mathscr{F},\mu_i)$ 的子代数，设 I 是 L' 的任一非零理想，则由于 L' 也是阶化代数，故与定理4类似证明可得 $1\in I$。从而 $\forall e\in B$, $0\leqslant k<\pi_n$, 有 $x^ez^{(k)}=[x^ez^{(k+1)},1]\in I$。又 $[x_1\cdots x_{n''}z^{(1)},z^{(\pi_n)}]=x_1\cdots x_{n''}z^{(\pi_n)}\in I$。由于 $x_{j'}\in I$, $\forall j\leqslant n''$, $\forall e=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n''})\in B$, $e\neq(1,\cdots,1)$，则 $\exists j$ 使 $\varepsilon_j=0$，若 $\varepsilon_{j'}=1$，则 $[x^{e+\varepsilon_j}z^{(\pi_n)},x_{j'}]=x^ez^{(\pi_n)}\in I$。若 $\varepsilon_j=\varepsilon_{j'}=0$，则

$$I\ni[x^{e+\varepsilon_j}z^{(\pi_n)},x_{j'}]=\mu_jx^{e+\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}}z^{(\pi_n-1)}+x^ez^{(\pi_n)},$$

由于 $x^{e+\varepsilon_j+\varepsilon_{j'}}z^{(\pi_n-1)}\in I$，所以同样有 $x^ez^{(\pi_n)}\in I$。而当 $e=(1,\cdots,1)$ 时，

$$x^ez^{\pi_n}=x_1\cdots x_{n''}z^{(\pi_n)}\in I。$$

因此 L' 是单的。

G 和 L' 实际上是两类单李代数，因为它们都带有参数 $\{\mu_i\}$ 及 π_n，但它们是不同构的，这是因为 $\dim G=2^{\pi_n+3}-2$，而 $\dim L'=2^{2m+\pi_n}$。

参 考 文 献

[1] Shen Guangyu. New Simple Lie Algebras of Characteristic *p*. *Chin. Ann. of Math.* 1983; **4B**(3): 329~346

[2] Kostrikin A I, Shafarevich I R. Graded Lie Algebras of Finite Characteristic. *Izv. AN SSSR (Ser. Math.)* 1969; **33**: 251~322.

[3] 薛小西。Cartan 型 Lie 代数 $H_n(\mathscr{F})$, $K_n(\mathscr{F})$ 当特征等于2时的结构，(硕士毕业论文) 中国科技大学研究生院

[4] B. Weisfeiler. On the Structure of the Minimal Ideal of Some Graded Lie Algebras in Characteristic $p>0$. *J. Algebra*. 1978: **53**: 344~361.

[5] 徐利治，蒋茂森，朱自强。计算组合数学，上海科学技术出版社

Lie Algebras $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ of Cartan Type of Characteristic $p=2$ and Their Subalgebras

LIN LEI
(*Department of Mathematics*)

Abstract

Over a field F of characteristic $p=2$, Lie algebras $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ of Cartan type K are constructed, where $\mathscr{F}$ is a flag, $\mu_i \in F$. $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ or their derivation algebras are shown to be simple if the coefficients $\{\mu_i\}$ have some restrictions. Two classes of simple subalgebras G and L' of $K(\mathscr{F}, \mu_i)$ are given.

Key words: Characteristic $p=2$ Cartan type simple Lie algebras K-type