文章编号: 1000-5641(2005)03-0001-05

$\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群

李可峰[1], 林 磊[2]

(1. 济南大学 理学院, 济南 250022; 2. 华东师范大学 数学系, 上海 200062)

摘要: 定义了 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群, 并列举了该群的一些例子; 进一步定义了与该群相邻的 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数, 并讨论了其性质.

关键词: $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群; $\mathbb{Z}_2$ 阶化群; $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数; $\mathbb{Z}_2$ 阶化李代数

中图分类号: O152; O151.23 文献标识码: A

0 引 言

文献[1]指出 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数(Para 统计)在一定意义上是 $\mathbb{Z}_2$ 阶化李代数(普通统计)的高维推广(二维扩充), 从而结构更加完整, 对称性更高. 利用 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数(Para 统计), 可以讨论 Para 粒子系统, 给出 Para-李超代数的态空间结构 Fock 表示, 讨论量子动力学超对称模型. 文献[2]给出阶化群与李超代数($\mathbb{Z}_2$ 阶化李代数)的关系, 并讨论了一些具体的群与生成的李超代数的关系, 尤其是二面体群 D_n. 本文将按文献[1]的格式定义 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群, 并给出一个群做成 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群的条件; 在数域 F 上构造群代数 $F[G]$, $F[G]$ 显然是一个具有 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化的结合代数, 通过定义: $\{x,y\} = xy - (-1)^{\alpha\alpha'+\beta\beta'}(\deg(x) = (\alpha,\beta), \deg(y) = (\alpha',\beta'))$ 则构成了一个 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 李代数, 称为与群 G 的群代数 $F[G]$ 相邻的 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 李代数. 当然, 一个 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群总对应一个 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数, 但它有可能是平凡的. 而一个 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数, 是否对应着一个 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群的回答是非常困难的. 本文还讨论了二面体群的 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化结构和 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数.

所谓 $\mathbb{Z}_2$ 阶化群[2]是指: G 是群,

$$G = G_{\bar 0} \cup G_{\bar 1},\ G_{\bar 0} \neq \varnothing,\ G_{\bar 1} \neq \varnothing,\ G_{\bar 0} \cap G_{\bar 1} = \varnothing,\ G_\alpha G_\beta \subseteq G_{\alpha+\beta},\ \alpha,\beta \in \{\bar 0, \bar 1\}.$$

显然, $G_{\bar 0} \trianglelefteq G$.

$\mathbb{Z}_2$ 阶化李代数(李超代数)[3]指: L 作为超代数 $L = L_{\bar 0} \oplus L_{\bar 1}$, 其运算 $[\ ,\ ]$ 满足

$$[a,b] = -(-1)^{\deg(a)\deg(b)}[b,a], \qquad [a,[b,c]] = [[a,b],c] + (-1)^{\deg(a)\deg(b)}[b,[a,c]].$$

文献[2]通过 $[x,y] = xy - (-1)^{\deg(x)\deg(y)}yx$ 运算给出了其相邻的李超代数的结构.

文献[1]中 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数是指数域 F 上代数 L 满足 $L = L_{\bar 0\,\bar 0} \oplus L_{\bar 0\,\bar 1} \oplus L_{\bar 1\,\bar 0} \oplus L_{\bar 1\,\bar 1}(L_{\bar i\,\bar j} \neq \varnothing, \bar i, \bar j \in \{\bar 0, \bar 1\} = \mathbb{Z}_2)$, $L_{\bar i\,\bar j}$ 为齐次分支, 并且运算 $\{\ ,\ \}$ 适合以下规则:

(1) 封闭性 $\forall u, v \in L$, 有 $\{u,v\} = w \in L$, 即 $\{L, L\} \to L$.

(2) 双线性 $\forall u, v, w \in L, \forall c_1, c_2 \in F$, 有

收稿日期: 2003-10

基金项目: 国家自然科学基金(10271047); 上海市重点学科建设项目; 上海市科学技术委员会项目(03JC14027)

作者简介: 李可峰(1972-), 男, 硕士, 讲师.

$$\{c_1u+c_2v,w\}=c_1\{u,w\}+c_2\{v,w\},\quad \{w,c_1u+c_2v\}=c_1\{w,u\}+c_2\{w,v\}.$$

(3) 阶化性　$\forall u\in L_{\bar{i}\ \bar{j}},\forall v\in L_{\bar{s}\ \bar{t}}$, 有

$$\{u,v\}=w\in L_{\overline{i+s}\ \overline{j+t}},\quad 即\ \{L_{\bar{i}\ \bar{j}},L_{\bar{s}\ \bar{t}}\}\to L_{\overline{i+s}\ \overline{j+t}}.$$

(4) 超对称性　$\forall u\in L_{\bar{i}\ \bar{j}},\forall v\in L_{\bar{s}\ \bar{t}}$, 有

$$\{u,v\}=-(-1)^{\deg(u)\deg(v)}\{v,u\},\quad (-1)^{\bar{0}}=1,(-1)^{\bar{1}}=-1.$$

这里要求

$$\deg L_{\bar{i}\ \bar{j}}=\bar{i}\ \bar{j},\ \deg L_{\bar{s}\ \bar{t}}=\bar{s}\ \bar{t},\ \deg L_{\bar{i}\ \bar{j}}\deg L_{\bar{s}\ \bar{t}}=\overline{is}+\overline{jt},\ \deg L_{\bar{i}\ \bar{j}}+\deg L_{\bar{s}\ \bar{t}}=\overline{i+s}\ \overline{j+t}.$$

指 (次) 函数 deg 显然具有二维向量特征.

(5) 广义 Jacobi 性　$\forall u,v,w\in L$ 为齐次元, 有

$$\{u,\{v,w\}\}(-1)^{\deg(u)\deg(w)}+\{v,\{w,u\}\}(-1)^{\deg(v)\deg(u)}+\{w,\{u,v\}\}(-1)^{\deg(w)\deg(v)}=0.$$

利用 $\forall u\in L_{\bar{0}\ \bar{1}},\forall v\in L_{\bar{1}\ \bar{0}}$, 有 $\{u,v\}=-\{v,u\}$ 可以说明一般意义下的 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化李代数不是李超代数, 正如李超代数不是李代数. 但是, $L_{\bar{0}\ \bar{0}}$, $L_{\bar{0}\ \bar{0}}\oplus L_{\bar{1}\ \bar{1}}$ 是李代数, $L_{\bar{0}\ \bar{0}}\oplus L_{\bar{0}\ \bar{1}}$, $L_{\bar{0}\ \bar{0}}\oplus L_{\bar{1}\ \bar{0}}$ 是李超代数.

本文有关阶化群及指数 (次数) 的含义同文献 [2].

1　$\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群

文献 [2] 给出 Γ-阶化群的定义, 如果令 Γ 为 Klein 四元群, 则 Γ-阶化群即为 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群.

定义 1　设 G 是群, Γ 是 Klein 四元群, 若群 $G=\bigcup_{\alpha\in\Gamma}G_\alpha$ 满足下述条件, 则称为 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群, 或者是具有 Klein 四元群阶化的群:

(1) $G_\alpha\neq\varnothing,\forall\alpha\in\Gamma$;

(2) $G_\alpha\cap G_\beta=\varnothing,\alpha\neq\beta,\alpha,\beta\in\Gamma$;

(3) $G_\alpha G_\beta\subseteq G_{\alpha\beta},\alpha,\beta\in\Gamma$.

如果把 Klein 四元群用加群 $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ 来刻划, 则群 G 的 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 二维阶化性更明显.

定义 1′　设群 G 满足 $G=G_{\bar{0}\ \bar{0}}\cup G_{\bar{0}\ \bar{1}}\cup G_{\bar{1}\ \bar{0}}\cup G_{\bar{1}\ \bar{1}}(G_{\bar{i}\ \bar{j}}\neq\varnothing,\bar{i},\bar{j}\in\{\bar{0},\bar{1}\}=\mathbb{Z}_2)$, 并且 $G_{\bar{i}\ \bar{j}}G_{\bar{s}\ \bar{t}}\subseteq G_{\overline{i+s}\ \overline{j+t}}$. 其中 $\deg(G_\alpha)=\alpha$ 为次数映射, 显然 $\deg:G\to\Gamma(\mathbb{Z}_{2\times 2})$ 为同态映射; 从而, G 必然具有 $\mathbb{Z}_2$ 阶化结构.

命题 1　设 G 是 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群, deg 为次数映射. 则

(1) $\deg x=\deg x^{-1},\forall x\in G$;

(2) $G^{(1)}\subseteq G_{\bar{0}\ \bar{0}}$, $G^{(1)}$ 是 G 的换位子群.

(3) $G_{\bar{0}\ \bar{0}},G_{\bar{0}\ \bar{0}}\cup G_{\bar{1}\ \bar{1}},G_{\bar{0}\ \bar{0}}\cup G_{\bar{0}\ \bar{1}},G_{\bar{0}\ \bar{0}}\cup G_{\bar{1}\ \bar{0}}$ 是 G 的正规子群.

证明　由于 $\deg:G\to\Gamma(\mathbb{Z}_{2\times 2})$ 为同态映射, 所以 $G/\ker(\deg)\cong\Gamma(\mathbb{Z}_{2\times 2}),G/G_{\bar{0}\ \bar{0}}$ 为交换群, 换位子群 $G^{(1)}\subseteq G_{\bar{0}\ \bar{0}}$. 因为对 $\forall x\in G$, 总有 $xx^{-1}\in G_{\bar{0}\ \bar{0}}$ 为群 G 的单位元, 故有 $\deg x=\deg x^{-1},\forall x\in G$.

利用 (1), (3)的证明是显然的.

定理 1　群 G 是 $\mathbb{Z}_{2\times 2}$ 阶化群当且仅当 G 有正规子群 N 满足 $G/N\cong\Gamma$ 为 Klein 四元群.

必要性由定义直接得到; 充分性参见文献 [2], 也可以如下证明: 设存在 G 的正规子群 N 满足 $\bar{G}=G/N\cong\Gamma(\mathbb{Z}_{2\times 2})$ 为 Klein 四元群, 则有 $\bar{G}=\{\bar{e},\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$, $\exists a,b,c\in G$ 为 $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$

在 $G \to G/N$ 下的原像. 令 $G_{\bar0\,\bar0} = N, G_{\bar0\,\bar1} = aN, G_{\bar1\,\bar0} = bN, G_{\bar1\,\bar1} = cN$, 则 $G = G_{\bar0\,\bar0} \cup G_{\bar0\,\bar1} \cup G_{\bar1\,\bar0} \cup G_{\bar1\,\bar1} (G_{\bar i\,\bar j} \neq \varnothing, \bar i, \bar j \in \{\bar0, \bar1\} = \mathbb{Z}_2)$, 并且满足 $G_{\bar i\,\bar j} G_{\bar s\,\bar t} \subset G_{\overline{i+s}\,\overline{j+t}}$, 构成 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化群.

例1　Klein 四元群 $K = \{e, a, b, ab\}$ 是 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化群, 并且具有多种等价的阶化结构[2]:

$$\begin{aligned} K &= K_{\bar0\,\bar0} \cup K_{\bar0\,\bar1} \cup K_{\bar1\,\bar0} \cup K_{\bar1\,\bar1} \\ &= \{e\} \cup \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} \\ &= \{e\} \cup \{a\} \cup \{c\} \cup \{b\} \\ &= \{e\} \cup \{b\} \cup \{a\} \cup \{c\} \\ &= \{e\} \cup \{b\} \cup \{c\} \cup \{a\} \\ &= \{e\} \cup \{c\} \cup \{a\} \cup \{b\} \\ &= \{e\} \cup \{c\} \cup \{b\} \cup \{a\}. \end{aligned}$$

例2　四元数群 $Q = \{\pm1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ 是 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化群, 并且具有多种等价的阶化结构.

例3　n 次对称群 S_n 没有 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构.

例4　循环群没有 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构.

命题2　设 G_i 是 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化群, $\deg_i$ 是次数映射, 若群 $G := G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ 的元素次数满足 $\deg(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \deg_1 x_1 + \deg_2 x_2 + \cdots + \deg_n x_n$, 则群 G 是 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化群.

命题3　设 H, K 是 $\mathbb{Z}_2$ 阶化群, 则群 $G := H \times K$ 是 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化群.

设 $H = H_{\bar0} \cup H_{\bar1}, K = K_{\bar0} \cup K_{\bar1}$ 为 $\mathbb{Z}_2$ 阶化结构, 分别令 $G_{\bar0\,\bar0} = H_0 \times K_0, G_{\bar0\,\bar1} = H_0 \times K_1$, $G_{\bar1\,\bar0} = H_1 \times K_0, G_{\bar1\,\bar1} = H_1 \times K_1$, 即得结论. 并且容易看出这种结构不唯一.

例5　文献 [2] 中的交换群 $G = \{e, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ 有不同的 $\mathbb{Z}_2$ 阶化结构, 并且不等价. 而 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构却只有一种：$H = \{e, a^2\}, H_1 = \{e, b\}, H_2 = \{e, a^2b\}$ 都为 G 指数 4 的正规子群,但 $G/H_i (i = 1, 2)$ 为循环群; 只有 $G/H \cong \mathbb{Z}_{2\times2}$, 即 G 只有一种 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构.

例6　二面体群[4] $G = D_n$ 在 n 为奇数时无 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构, 在 n 为偶数时, 具有 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构. 前者是显然的. 设 $G = D_{2q} = \{r, s | r^n = s^2 = 1, srs = r^{-1}, n = 2q\}$, $G_{\bar0\,\bar0} = \{1, r^2, \cdots, r^{2q-2}\}$, $G_{\bar0\,\bar1} = \{s, sr^2, \cdots, sr^{2q-2}\}$, $G_{\bar1\,\bar0} = \{sr, sr^3, \cdots, sr^{2q-1}\}$, $G_{\bar1\,\bar1} = \{r, r^3, \cdots, r^{2q-1}\}$, 得到 $G = G_{\bar0\,\bar0} \cup G_{\bar0\,\bar1} \cup G_{\bar1\,\bar0} \cup G_{\bar1\,\bar1}$ 的 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构.

例7　交换群 $G = \langle a, b, c \,|\, a^4 = b^2 = c^2 = e \rangle$ 有不等价的 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构.

$$\begin{aligned} G &= G_{\bar0\,\bar0} \cup G_{\bar0\,\bar1} \cup G_{\bar1\,\bar0} \cup G_{\bar1\,\bar1}, \\ &= \{e, a, a^2, a^3\} \cup \{b, ab, a^2b, a^3b\} \cup \{c, ac, a^2c, a^3c\} \cup \{bc, abc, a^2bc, a^3bc\}, \\ &= \{e, b, a^2, a^2b\} \cup \{ac, abc, a^3c, a^3bc\} \cup \{c, bc, a^2c, a^3c\} \cup \{a, a^3, ab, a^3b\}. \end{aligned}$$

这是因为它们的 $G_{\bar0\,\bar0}$ 不同构.

2　$\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化群与相邻的 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化李代数

设 F 为代数闭域且满足 $\mathrm{char}F \nmid |G|$, G 的群代数 $F[G]$ 为结合代数. 令 $x \circ y = xy - yx$, 则构成了李代数. 而如果 G 具有 $\mathbb{Z}_2$ 阶化结构, $F[G]$ 也同样具有, 令 $[x, y] = xy - (-1)^{\deg x \deg y} yx$, 则构成了李超代数 ($\mathbb{Z}_2$ 阶化李代数). 更进一步, 如果 G 具有 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化结构, $F[G]$ 也同样具有, 若令 $\{x, y\} = xy - (-1)^{\deg(x)\deg(y)} yx$, 则构成了 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化李代数.

仿照文献 [2] 的证明, 可以得出:

定理2 设群G具有等价的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化结构, 则与G两种$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化结构分别相邻的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数是同构的.

定理3 设群G,H同构, 保持$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化结构同构, 则G,H分别相邻的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数是同构的.

例8 交换群$G=\langle a,b,c\,|\,a^4=b^2=c^2=e\rangle$有不等价的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化结构.

$$\begin{aligned} G &= G_{\bar 0\,\bar 0}\cup G_{\bar 0\,\bar 1}\cup G_{\bar 1\,\bar 0}\cup G_{\bar 1\,\bar 1},\\ &= \{e,a,a^2,a^3\}\cup\{b,ab,a^2b,a^3b\}\cup\{c,ac,a^2c,a^3c\}\cup\{bc,abc,a^2bc,a^3bc\},\\ &= \{e,b,a^2,a^2b\}\cup\{a,a^3,ab,a^3b\}\cup\{c,bc,a^2c,a^3c\}\cup\{bac,abc,a^3c,a^3bc\}.\end{aligned}$$

这是两个不等价的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化结构. 在复数域$\mathbb{C}$上分别对应的群代数为A,B, 作$\varphi:A\to B$为$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化群代数之间的同构映射, 则诱导了$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数之间的同构映射. φ的作用如下:

$$e\mapsto e,a\mapsto\frac{1+i}{2}ba^2+\frac{1-i}{2}b,a^2\mapsto a^2,a^3\mapsto\frac{1+i}{2}b+\frac{1-i}{2}ba^2,$$

$$ba\mapsto ba,b\mapsto\frac{1+i}{2}a+\frac{1-i}{2}a^3,ba^3\mapsto ba^3,ba^2\mapsto\frac{1+i}{2}a^3+\frac{1-i}{2}a,$$

$$c\mapsto c,ca\mapsto\frac{1+i}{2}cba^2+\frac{1-i}{2}cb,ca^2\mapsto ca^2,ca^3\mapsto\frac{1+i}{2}cb+\frac{1-i}{2}cba^2,$$

$$cba\mapsto cba,cb\mapsto\frac{1+i}{2}ca+\frac{1-i}{2}ca^3,cba^3\mapsto cba^3,cba^2\mapsto\frac{1+i}{2}ca^3+\frac{1-i}{2}ca.$$

同一个群不等价的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化结构, 其相邻的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数也有可能是同构的. 是否有不同构的群, 其对应的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数同构? 估计是可以的.

3 $\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数

研究$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数对研究代数的对称性有一定意义. 但有关$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数的研究只是才开始, 我们只能给出一些基本的概念. 尤其是注意到若$\{L_{\bar 0\,\bar 1},L_{\bar 1\,\bar 0}\}=\{L_{\bar 0\,\bar 1},L_{\bar 1\,\bar 1}\}=\{L_{\bar 1\,\bar 0},L_{\bar 1\,\bar 1}\}=0$时, $L=(L_{\bar 0\,\bar 0}\oplus L_{\bar 1\,\bar 1})\bigoplus(L_{\bar 0\,\bar 1}\oplus L_{\bar 1\,\bar 0})$成为$\mathbb{Z}_2$阶化李代数(李超代数). 若$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数$L$非空子集的元素关于$L$的运算也做成$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数, 则为$L$的子代数, 若$\varnothing\neq N\subseteq L,\{x,N\}\subseteq N,\{N,x\}\subseteq N,\forall x\in L$, N为L的理想, 记为$N\trianglelefteq L$. 显然, $\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数的理想也是$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化子代数.

设V是具有$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化的向量空间, 则$\mathrm{Hom}(V)$自然具有$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化, 成为具有$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化的结合代数. 由$\{x,y\}=xy-(-1)^{\alpha\alpha'+\beta\beta'}(\deg(x)=(\alpha,\beta),\deg(y)=(\alpha',\beta')),x,y\in\mathrm{Hom}(V)$得到一般线性$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数.

定义2 设$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数L, $\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化的向量空间V, 存在线性映射$\rho:L\to\mathrm{Hom}(V)$, 对于L中齐次元素满足

$$\rho\{x,y\}=\rho(x)\rho(y)-(-1)^{\deg(x)\deg(y)}\rho(y)\rho(x)$$

则称ρ为L的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化表示. 其中V为$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化表示空间, 也是一个(左)$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化L-模.

若设$\mathrm{ad}x:L\to L$满足$\mathrm{ad}x(y)=\{x,y\},\forall y\in L$构成$L$的$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化伴随表示, $\mathrm{ad}x$为L的内导子, 全体内导子构成一个$\mathbb{Z}_{2\times2}$阶化李代数为L的内导子代数, 记为$\mathrm{ad}L$. 设$\forall x,y,z\in$

L 为齐次元素, $\deg \mathrm{ad}x = \deg x, \deg \mathrm{ad}y = \deg y, (\deg(\{x,y\}) = \deg(x) + \deg(y))$, 则有

$$\begin{aligned}
\{\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y\}z &= (\mathrm{ad}x\,\mathrm{ad}y - (-1)^{\deg(x)\deg(y)}\mathrm{ad}y\,\mathrm{ad}x)z \\
&= \{x,\{y,z\}\} - (-1)^{\deg(x)\deg(y)}\{y,\{x,z\}\} \\
&= \{x,\{y,z\}\} + (-1)^{\deg(x)\deg(y)}(-1)^{\deg(x)\deg(z)}\{y,\{z,x\}\} \\
&= (-1)^{\deg(x)\deg(z)}\{(-1)^{\deg(x)\deg(z)}\{x,\{y,z\}\} + (-1)^{\deg(x)\deg(y)}\{y,\{z,x\}\}\} \\
&= -(-1)^{\deg(x)\deg(z)}(-1)^{\deg(z)\deg(y)}\{z,\{x,y\}\} \\
&= (-1)^{\deg(x)\deg(z)}(-1)^{\deg(z)\deg(y)}(-1)^{\deg(\{x,y\})\deg(z)}\{\{x,y\},z\} \\
&= (-1)^{\deg(x)\deg(z)}(-1)^{\deg(z)\deg(y)}(-1)^{\deg(x)\deg(z)+\deg(z)\deg(y)}\{\{x,y\},z\} \\
&= \{\{x,y\},z\} \\
&= \mathrm{ad}\{x,y\}(z).
\end{aligned}$$

由于线性关系, 对 $\forall x,y,z \in L$ 都有 $\{\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y\}z = \mathrm{ad}\{x,y\}(z)$.

定义 3　设 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化李代数 L, 存在线性映射 $D: L \to L$, 对于 L 中齐次元素满足

$$D\{x,y\} = \{D(x), y\} + (-1)^{\alpha\deg(x)}\{x, D(y)\} (\alpha \in \mathbb{Z}_{2\times2}),$$

则称 D 为 L 的 α 次导子. L 的导子全体构成一个 $\mathbb{Z}_{2\times2}$ 阶化李代数, 称为 L 的导子代数, 记为 $\mathrm{Der}\,L$.

定理 4　$\mathrm{ad}L \trianglelefteq \mathrm{Der}L$.

设 D 为 L 的 α 次导子, $\forall x,y \in L$ 为齐次元, $Dy = z, \deg \mathrm{ad}x = \deg x$, 有

$$\begin{aligned}
\{D, \mathrm{ad}x\}y &= D\,\mathrm{ad}x(y) - (-1)^{\alpha\deg(x)}\mathrm{ad}x D(y) \\
&= D\{x,y\} - (-1)^{\alpha\deg(x)}\{x,z\} \\
&= \{Dx,y\} + (-1)^{\alpha\deg(x)}\{x,z\} - (-1)^{\alpha\deg(x)}\{x,z\} \\
&= \mathrm{ad}D(x)(y).
\end{aligned}$$

从而对任意内导子都成立 $\{D, \mathrm{ad}x\}y = \mathrm{ad}D(x)(y)$, 定理成立.

[参　考　文　献]

[1] 杨为民, 井思聪. 一种新的阶化 Lie 代数与 Para 统计超对称性[J]. 中国科学 (A辑), 2001, 31(1): 49~55.
[2] LIN Lei. Graded Groups and Lie Superalgebras[J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2001, 1: 16~24.
[3] Kac V G. Lie Superalgebras[J]. Advances in Maths, 1977, 26: 8~96.
[4] 曾锡华, 时俭益. 有限群表示论[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
[5] Humphreys J E. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory(GTM,Vol.9)[M]. New York: Springer-Verlag, 1972.

$\mathbb{Z}_{2\times2}$ Graded Group

LI Ke-feng[1], LIN Lei[2]
(1. *School of Sciences, Jinan University, Jinan* 250002, *China*; 2. *Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai* 200062, *China*)

Abstract: In this paper, $\mathbb{Z}_{2\times2}$ graded groups are defined and some examples are given. Furthermore, $\mathbb{Z}_{2\times2}$ graded Lie algebra associated with a $\mathbb{Z}_{2\times2}$ graded group is defined and its properties are discussed.

Key words: $\mathbb{Z}_{2\times2}$ graded group; $\mathbb{Z}_2$ graded group; $\mathbb{Z}_2$ graded Lie algebra; $\mathbb{Z}_{2\times2}$ graded Lie algebra