多项式理论介绍

主讲：林磊

· 教学时间安排：

在第十章介绍一元多项式理论之初，作为该章的引言.

· 教学目的：

为使学生了解研究多项式的重要性、本章的主要内容、本章与其余章节的联系以及与其他数学课程的关联，特意用一节课的时间安排这一内容，以开阔学生的视野。

一、多项式研究的历史简介

多项式研究最早是从解一元多项式方程开始的。古代的代数学本质上是研究如何解多项式方程，即寻找一元 n 次方程的求根公式。一元二次方程的求根公式很早就为数学家所熟知。但三次方程的求根公式直到十六世纪才为世人所知，这就是所谓的卡丹(Cardano)公式. 即，对于一般三次方程，通过适当的线性代换，可简化为方程 $x^3+px+q=0$，而这一方程的根可表为：

$$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q+\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}q-\sqrt{\frac{1}{4}q^2+\frac{1}{27}p^3}}.$$

以后，数学家很快又得到了一般四次方程的求根公式。但在讨论一般五次方程时遇到了前所未有的困难。最后，鲁菲尼、阿贝尔、伽罗瓦等人认识到对于一般五次或五次以上方程是不存在求根公式的。这也导致了伽罗瓦理论的诞生。伽罗瓦讨论了多项式是否有根式解与该多项式的根的对称群之间的关系，从而将代数学从古典阶段带入到现代阶段。由于求根是代数学古典阶段

的主要研究目标，因此这也就说明了将复系数多项式根的存在性定理冠之以"代数学基本定理"的原因。在伽罗瓦理论之后，多项式的研究大致有两个主要方向：一是求多项式的近似根，这是数学分析与计算数学研究的对象；另一是考虑全体一元多项式这一集合，即多项式环的结构问题，这是近世代数研究的主要对象之一。

二．本章的主要内容

本章一开始介绍了一元多项式的一些基本概念与基本运算。之后是整除与带余除法。这一内容虽然较简单，但却是研究多项式的核心手段之一。利用辗转相除法，可求两多项式的最大公因式，然后就导出了一般数域上的因式分解定理，因而有了标准分解式及重因式的概念。第七节多项式的根，则是从函数的角度来处理多项式。虽然在本课程中两者是一致的，但以后将系数从数域推广到一般域上时，作为代数形式的多项式与作为函数形式的多项式这两个概念并不是一致的。此后的两节则考虑在特殊的数域（复数域、实数域以及有理数域）上的多项式分解问题，从中可以看出数学中的一个辩证关系：基域越复杂（如：复数域），问题处理起来可能越简单（如：$\mathbb{C}$上不可约多项式都是一次的），而基域越简单（如：有理数域），问题处理起来可能越复杂（如：$\mathbb{Q}$上有任意次的不可约多项式存在）。可以说本章的内容主要是围绕多项式的分解来展开的。与本章多项式内容平行的是整数的相应理论。由于时间的关系，这一理论我们不打算展开讲，大家可以自己阅读相关的评注及第四节内容。这部分内容的详细描述则是《初等数论》的主要目标之一。

三．研究多项式的意义，与其他数学内容的联系

多项式的研究，首先是要解决求根问题。虽然由伽罗瓦理论

在一般情形我们无法求出根的精确值，但可讨论在某个数域上根的存在性问题以及是否有重根。由于线性变换的讨论中特征值理论占很重要的地位，因此研究特征多项式 $\chi(\lambda)$ 的性质非常重要，而线性变换（或方阵）是否可对角化直接与极小多项式是否有重根有关，因此研究多项式对讨论线性变换、特别是可对角化问题有重要意义。当然由于一元多项式是多元多项式的特例，因此本章与下一章多元多项式有着直接的联系。一元 n 次多项式的系数可以看成它的 n 个根的对称多项式，而一元多项式是否有重根可利用其判别式来刻画，这就为我们提供了判别重根的另一种方法。

在实际问题（例如工程问题）中，给出的多项式的系数都是实测数据，因此是有限小数，从而研究有理系数多项式或整系数多项式有实际的意义，当然它在代数学中也有其理论意义。从数学分析角度考虑，由于超越函数的运算（例如：求值）比之多项式来说困难得多，因此，利用适当的多项式来拟合超越函数成为重要的课题。而函数的泰勒展开正是反应了这一基本的想法。在计算数学中常常需要使用某类具有特殊性质的多项式组（例如：正交多项式组），因此多项式理论在这一领域也非常重要。如果将多项式的系数域推广到一般域，则有时研究难度将大大增加。例如：将数域改为模 p 剩余类域 $\mathbb{Z}_p$，则求二次多项式的根的方法与通常的就不一样。关于这一类方程在 $\mathbb{Z}_p$ 中是否有解，在数论中有专门的讨论，它最终可简化为 $x^2=a$ 是否有解，即所谓平方剩余问题。利用勒让得（Legendre）符号、高斯二次反转定律等工具可解决这一问题。关于整系数（或有理系数）不可约多项式问题，我们这里可举一个分圆多项式的例子。如果复数 ξ 是 n 次单位根，即 $\xi^n=1$，但对任意小于 n 的正整数 m，$\xi^m\neq1$，则称 ξ 为 n 次

本原单位根。定义

$$\Phi_n(x)=\prod_{i=1}^{\varphi(n)}(x-\xi_i),$$

其中，$\xi_1,\cdots,\xi_{\varphi(n)}$ 是所有不同的 n 次本原单位根，称 $\Phi_n(x)$ 为 n 次分圆多项式。可以证明，

$$x^n-1=\prod_{d|n}\Phi_d(x).$$

因此每个 $\Phi_n(x)$ 可以通过上式归纳地求出。而 $\Phi_n(x)$ 都是整系数的，$\mathbb{Q}$ 上的不可约多项式！例如，$\Phi_1(x)=x-1$，$\Phi_2(x)=x+1$，$\Phi_5(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$，$\Phi_{10}(x)=x^4-x^3+x^2-x+1$，且

$$x^{10}-1=\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_5(x)\Phi_{10}(x).$$

是 $x^{10}-1$ 在 $\mathbb{Q}$ 上的不可约分解。关于分圆多项式以及分圆域的性质属于代数数论的研究对象。

数域上多项式的分解理论在近世代数中被推广到更一般的情况。我们可以将整数环 $\mathbb{Z}$ 及域上多项式环 $K[x]$ 的分解性质加以抽象，得到所谓的唯一因式分解整环的概念，例如，高斯整环 $\mathbb{Z}[i]=\{a+bi\,|\,a,b\in\mathbb{Z}\}$ 就是这样的环。在这样的环中具有与 $\mathbb{Z}$ 与 $K[x]$ 中类似的唯一分解定理。但并非任意数环都具有这样的性质，当年数学家正是没有认识到这一点才在费马大定理的证明中出了错。将整数与多项式的带余除法性质加以抽象，数学家又提出了欧氏环的概念，这些都成为环论的研究对象。多项式还与域的扩张问题有联系。例如，考虑由多项式 x^2+1 在 $\mathbb{R}[x]$ 中所生成的理想 $\langle x^2+1\rangle=\{(x^2+1)f(x)\,|\,f(x)\in\mathbb{R}[x]\}$，构造所谓的商环 $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$，可以证明：$\mathbb{R}[x]/\langle x^2+1\rangle$ 与复数域 $\mathbb{C}$ 是同构的。这里只是举了多项式与数学其他分支的联系的几个例子，事实上，这样的联系还有许许多多，大家以后随着学习的不断深入会逐渐体会到。