有理函数的分拆

——多项式因式分解定理的应用

主讲：林磊

· 教学时间安排：

在第十章第五节因式分解定理讲解之后，作为该定理的应用，用一节课左右的时间，介绍这一内容。

· 教学目的：

在学习数学分析时，学到有理函数的不定积分时，需要介绍有理函数的分拆技巧，但当时没有介绍它的理论基础。因此，在讲解了多项式因式分解定理之后，一方面这一内容可作为该定理的一个应用，同时又弥补了数学分析教学中的不足。此外，还能以此说明数学中的各课之间都有千丝万缕的联系，我们不能将其人为隔离。

例：求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^3(x^2+4x+5)^2}$.

解：先将被积函数写成如下形式：

$$\frac{1}{(x-1)^3(x^2+4x+5)^2}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B_1+C_1x}{x^2+4x+5}+\frac{B_2+C_2x}{(x^2+4x+5)^2}.$$

利用待定系数法可求出系数 $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, C_1, C_2$. 然后再求积分.

现考虑对一般的有理函数

$$\frac{G(x)}{F(x)},\quad F(x), G(x)\in \mathbb{R}[x],\ \deg F>0,\ (F,G)=1.$$

如何将上述有理函数写成部分分式的和？

〈第一步〉将"假分数"化为"带分数"

如果 $\deg G(x) \geqslant \deg F(x)$，那么由带余除法定理，存在 $h(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$，使得 $G(x) = h(x)F(x) + g(x)$，$\deg g(x) < \deg F(x)$.（注意：$g(x) \neq 0$）. 则

$$\frac{G(x)}{F(x)} = h(x) + \frac{g(x)}{F(x)}.$$

所以，问题就简化为对 $\frac{g(x)}{F(x)}$ 的分拆问题.

〈第二步〉分解 $F(x)$

不妨设 $F(x)$ 是首一多项式，则由因式分解定理，

$$F(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_s(x),$$

其中每个 $f_i(x) = p_i(x)^{r_i}$，$(r_i \geqslant 1)$. $p_1(x), p_2(x), \cdots, p_s(x)$ 是不同的首一不可约多项式. 由引理 8.6 (p225)，这些 $p_i(x)$ 或是一次的，或是二次的，且判别式 < 0.

〈第三步〉

令 $F_i(x) = F(x)/f_i(x) \in \mathbb{R}[x]$.（即，$F_i(x)f_i(x) = F(x)$），则

$$(F_1(x), F_2(x), \cdots, F_s(x)) = 1.$$

于是存在多项式 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x) \in \mathbb{R}[x]$，使得

$$u_1(x)F_1(x) + u_2(x)F_2(x) + \cdots + u_s(x)F_s(x) = 1.$$

〈第四步〉

存在 $v_1(x), v_2(x), \cdots, v_s(x) \in \mathbb{R}[x]$，使 $g(x) = \sum_{i=1}^{s} v_i(x)F_i(x)$，且可要求 $\deg v_i(x) < \deg f_i(x)$，$i = 1, \cdots, s$.

这是因为由上一步，

$$\begin{aligned} g(x) &= u_1(x)g(x) \cdot F_1(x) + \cdots + u_s(x)g(x) \cdot F_s(x) \\ &= V_1(x) \cdot F_1(x) + \cdots + V_s(x) \cdot F_s(x). \end{aligned}$$

对于每个$V_i(x)$，存在$h_i(x), v_i(x)\in\mathbb{R}[x]$，使得

$$V_i(x)=h_i(x)f_i(x)+v_i(x),\quad \deg v_i(x)<\deg f_i(x),$$

故

$$\begin{aligned} g(x)&=\sum_{i=1}^{s}V_i(x)F_i(x)=\sum_{i=1}^{s}(h_i(x)f_i(x)+v_i(x))F_i(x)\\ &=\sum_{i=1}^{s}v_i(x)F_i(x)+\sum_{i=1}^{s}h_i(x)f_i(x)F_i(x)\\ &=\sum_{i=1}^{s}v_i(x)F_i(x)+\left(\sum_{i=1}^{s}h_i(x)\right)F(x).\end{aligned}$$

由于$\deg g(x)<\deg F(x)$，因此$\left(\sum_{i=1}^{s}h_i(x)\right)\cdot F(x)=0$.

〈第五步〉

$$\frac{g(x)}{F(x)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{v_i(x)F_i(x)}{F(x)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{v_i(x)}{f_i(x)}=\sum_{i=1}^{s}\frac{v_i(x)}{p_i(x)^{r_i}}.$$

〈第六步〉

对于$\dfrac{v(x)}{(x-a)^k}$，$\deg v(x)<k$. 则$v(x)\in\mathbb{R}[x]_k$，而$1, x-a, (x-a)^2, \cdots, (x-a)^{k-1}$是线性空间$\mathbb{R}[x]_k$的基. 于是，存在$A_1, A_2, \cdots, A_k\in\mathbb{R}$，使 $v(x)=\sum_{i=0}^{k-1}A_{k-i}(x-a)^i$. 从而

$$\frac{v(x)}{(x-a)^k}=\left(\sum_{i=0}^{k-1}A_{k-i}(x-a)^i\right)\Big/(x-a)^k=\sum_{i=1}^{k}\frac{A_i}{(x-a)^i}.$$

（事实上，$v(x)=\sum_{i=0}^{k-1}\frac{v^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$，即$A_{k-i}=\frac{v^{(i)}(a)}{i!}$）

〈第七步〉

对于$\dfrac{v(x)}{(x^2+px+q)^k}$，其中$p^2-4q<0$，$\deg v(x)<2k$. 则利用带余除法，有

$$\begin{aligned} v(x)&=(B_k+C_kx)+q_1(x)(x^2+px+q)\\ &=(B_k+C_kx)+(B_{k-1}+C_{k-1}x)(x^2+px+q)+q_2(x)(x^2+px+q)^2\\ &=\cdots=\sum_{i=0}^{k-1}(B_{k-i}+C_{k-i}x)(x^2+px+q)^i.\end{aligned}$$

于是，$$\frac{v(x)}{(x^2+px+q)^k}=\sum_{i=1}^{k}\frac{B_i+C_ix}{(x^2+px+q)^i}.$$

最后，利用第一步、第五步、第六步和第七步，我们就得到了一般有理函数$\dfrac{G(x)}{F(x)}$的分析.