用三角形纸折出的四面体探究

200062 华东师范大学数学系 林 磊

假设一个四面体$P-ABC$的侧面由卡纸组成, 如果我们将该四面体沿着它的某个顶点(不妨设为P)剖开摊平, 则一般地它的展开图是一个六边形$P_1AP_2BP_3C$(它一般不一定是凸的), 见图1.

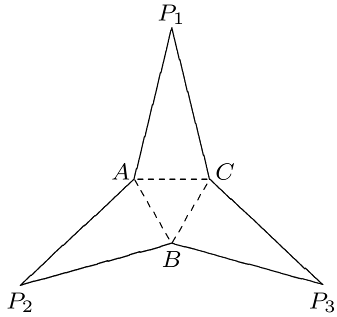


图 1

那么问: 什么时候其展开图是一个三角形呢? 我们有:

定理1 四面体的展开图是三角形的充分必要条件是它的每个三面角的角度之和等于180度.

证明: 设四面体$P-ABC$沿点P的展开图是三角形$P_1P_2P_3$ ($P=P_1=P_2=P_3$), 那么P_1、A、P_2在一直线上, 于是$\angle P_1AC+\angle CAB+\angle BAP_2=180°$, 也就是说,

$$\angle PAC+\angle CAB+\angle BAP=180°.$$

于是顶点A处的三个侧面的角度之和等于180度. 同理, 对于顶点B处及顶点C处结论也成立. 而在顶点P处, 由于$P_1P_2P_3$是三角形, 故$\angle P_1+\angle P_2+\angle P_3=180°$, 从而$\angle APB+\angle BPC+\angle CPA=180°$. 所以对于顶点$P$, 结论也成立.

反之, 如果四面体$P-ABC$的每个三面角的角度之和等于180度. 那么$\angle PAC+\angle CAB+\angle BAP=180°$, 于是在由顶点$P$确定的展开图$P_1AP_2BP_3C$中, P_1、A、P_2在一直线上.

同理, P_2、B、P_3在一直线上, P_3、C、P_1在一直线上. 因此展开图$P_1AP_2BP_3C$是三角形$P_1P_2P_3$. 事实上, 同理可证, 由四面体的任一顶点确定的展开图都是三角形.

那么, 现在来问这样一个问题: 是否任意的三角形都是某个四面体的展开图? 或等价地, 怎样的三角形才是某个四面体的展开图? 我们先来给出一个概念: 对于一个三角形$P_1P_2P_3$, 将该三角形看成是画在卡纸上的. 设A、B、C分别为P_1P_2、P_2P_3、P_3P_1的中点, 设AB、BC、CA为折痕, 如果我们可以将三角形$P_1P_2P_3$沿折痕折成一个四面体$P-ABC$, 其中P为将P_1、P_2、P_3粘合而成的顶点. 则我们称三角形$P_1P_2P_3$为可构造的, 四面体$P-ABC$为由三角形$P_1P_2P_3$折出的. 显然, 此时该三角形就是此四面体的展开图.

定理2 三角形$P_1P_2P_3$是可构造的充分必要条件是$P_1P_2P_3$是一个锐角三角形.

证明: 若三角形$P_1P_2P_3$是可构造的, 则$P_1P_2P_3$就是某个四面体$P-ABC$的展开图. 因此, 由定理1, 该四面体的每个三面角的角度之和等于180度. 在三角形$P_1P_2P_3$中, 设$\angle P_1=\alpha$, $\angle P_2=\beta$, $\angle P_3=\gamma$, 则$\alpha+\beta+\gamma=180°$. 考虑顶点P所在的三面角, 则$\angle CP_1A=\alpha$, $\angle AP_2B=\beta$, $\angle BP_3C=\gamma$. 于是, 由文[1]知, $\beta+\gamma>\alpha$. 从而$\alpha+\beta+\gamma>2\alpha$, 得$2\alpha<180°$, 即$\alpha<90°$. 同理得$\beta<90°$, $\gamma<90°$. 因此, 三角形$P_1P_2P_3$是一个锐角三角形.

反之, 如果三角形$P_1P_2P_3$是锐角三角形, 则它的三个内角α、β、γ均为锐角, 且$\alpha+\beta+\gamma=180°$, 设A、B、C分别为P_1P_2、P_2P_3、P_3P_1的中点, 我们要证以AB、BC、CA为折痕, 可以将三角形$P_1P_2P_3$形状的卡纸拼成一个四面体$P-ABC$. 由于P点的三个角为α、β、γ, 且$\alpha+\beta+\gamma=180°<360°$, $\alpha+\beta>\gamma$(因为$\gamma<90°$), 所以由顶点P所确定的三面角是可构造的. 又因为$AC/\!/P_2P_3$, 所以$\angle P_1AC=\beta$.

同理$\angle BAP_2=\alpha$, $\angle CAB=\gamma$, 因此$\angle BAP_2+\angle P_1AC+\angle CAB<360°$, 且$\angle BAP_2+\angle P_1AC>\angle CAB$, 所以由顶点$A$所确定的三面角也是可构造的. 同理由顶点$B$及顶点$C$确定的三面角也是可构造的. 因此根据文[1], 四面体$P-ABC$可折成. 于是三角形$P_1P_2P_3$是可构造的.

推论　如果四面体$P-ABC$的展开图是三角形, 则它的四个三面角全等且方向也一致.

证明: 设该四面体$P-ABC$如图2所示, 则顶点P处的三个角按从P到四面体的中心O的方向看逆时针的次序为α, β, γ. 从定理的证明可以看出, 该结论对顶点A、B、C中的每一个都成立. 结论得证.

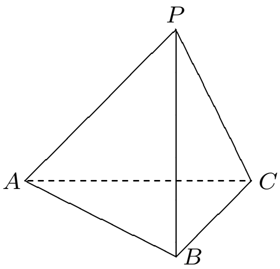


图 2

四面体的展开图是否为三角形还可以用四面体的棱长来判别.

定理3　四面体$P-ABC$的展开图是三角形的充分必要条件是该四面体的每一对对棱(即没有公共顶点的两条棱)长度相同.

证明: 如果四面体$P-ABC$的展开图是三角形$P_1P_2P_3$, 则A、B、C分别为P_1P_2、P_2P_3、P_3P_1的中点. 设$|PA|=a$, $|PB|=b$, $|PC|=c$, 那么在三角形$P_1P_2P_3$中, 由于BC是中位线, 故

$$|BC|=\frac{1}{2}|P_1P_2|=\frac{1}{2}(|P_1A|+|AP_2|)$$
$$=\frac{1}{2}(a+a)=a=|PA|.$$

同理, $|CA|=b=|PB|$, $|AB|=c=|PC|$. 于是, 四面体$P-ABC$的每一对对棱长度相同.

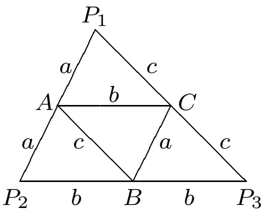


图 3

如果四面体$P-ABC$的每一对对棱长度相同, 不妨设$|PA|=|BC|=a$, $|PB|=|CA|=b$, $|PC|=|AB|=c$, 那么在四面体$P-ABC$的展开图$P_1AP_2BP_3C$中的四个小三角形CP_1A、BAP_2、P_3CB以及ABC是全等的, 见图3. 于是, $P_1A /\!/ BC$, $AP_2 /\!/ BC$, 从而P_1AP_2是直线段, 同理, P_2BP_3以及P_3CP_1都是直线段. 所以展开图$P_1AP_2BP_3C$是三角形$P_1P_2P_3$.

定理4　四面体$P-ABC$的展开图是三角形的充分必要条件是该四面体的每个面都是全等的三角形.

证明: 如果四面体$P-ABC$的展开图是三角形, 则由定理3知, 该四面体的每一对对棱长度相同, 则由定理3中证明知, 展开图中的四个小三角形CP_1A、BAP_2、P_3CB以及ABC是全等的三角形, 故该四面体的每个面都是全等的三角形.

反之, 如果四面体$P-ABC$的每个面都是全等的三角形. 如果这些三角形的三边长互不相等. 设在三角形ABC中, $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$. 如果$|PA|=c$, 则三角形PAB不可能与ABC全等. 如果$|PA|=b$, 则三角形PAC不可能与ABC全等. 于是$|PA|=a$, 从而$|PB|=b$, $|PC|=c$. 故由定理3知四面体$P-ABC$的展开图是三角形.

定理5　四面体$P-ABC$的展开图是三角形的充分必要条件是该四面体的每个三面角全等(此时必可推出方向也是一致的).

证明: 必要性就是定理2的推论, 且此时方向也一致. 所以我们只要证明充分性.

如果四面体$P-ABC$每个三面角全等. 设某顶点的三面角由大小为α、β、γ的三个角所确定. 由于四面体的每个侧面为三角形, 而三角形的内角和为180度, 并注意到该四面体的每个三面角全等的事实, 故$4(\alpha+\beta+\gamma)=4\times180°$. 于是$\alpha+\beta+\gamma=180°$. 所以该四面体的每个三面角的角度之和都等于180度. 由定理1, 该四面体的展开图是三角形, 从而也推出了三面角的方向也是一致的.

最后, 我们来求用三角形折出的四面体$P-ABC$的体积. 如果$|PA|=a$, $|PB|=b$, $|PC|=c$, 那么四面体$P-ABC$的体积为$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$.

可利用文[2]中的方法来证明上述结论. 首先注意到 $\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{c}$ 所确定的平行六面体的体积 V' 等于 $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ 的混合积的绝对值 $\left|\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)\right|$, 或等价地, $V'=\sqrt{\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)^2}$.

设 $\overrightarrow{a}=(a_{11},a_{12},a_{13})$,

$\overrightarrow{b}=(a_{21},a_{22},a_{23})$,

$\overrightarrow{c}=(a_{31},a_{32},a_{33})$, 那么

$$\left(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b},\overrightarrow{c}\right)^2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}^2$$

$$=\left|\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}&\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}&\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}\\\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}&\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}&\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}\\\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}&\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b}&\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a^2&\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}&\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}\\\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}&b^2&\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}\\\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}&\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}&c^2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2).$$

于是, $V=\dfrac{1}{6}V'$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{12}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}.$$

注1: 从上述体积公式中我们也可以很容易地看出每对对棱长度相等的四面体能够构造的必要条件是以 a、b、c 为边长的三角形可构造且它是个锐角三角形. 这是因为以 a、b、c 为边长的三角形是该四面体的一个面, 它当然要可构造. 其次从体积公式中可以看到根式内的表达式必须大于零, 于是它不等于零, 从而该三角形不是直角三角形. 若它是钝角三角形, 不妨设边长为 c 的边所对的角是钝角, 则三角形的另两角均为锐角, 于是由余弦定理, $a^2+b^2-c^2<0$, $c^2+a^2-b^2>0$, $b^2+c^2-a^2>0$, 从而根式内的表达式为负, 矛盾! 于是, 该三角形必是锐角三角形.

注2: 定理4的充要条件还可以减弱为:“该四面体的每个面都有相同的面积”. 这是因为由文[3]中第5页的问题3:

“已知三棱锥的每个面有相同的面积, 证明这些面是全等的.”

即知上述结论成立(该问题的解答可见文[3]第26页).

参考文献

[1] 林磊. 探索具有两种棱长的四面体的种类. 数学教学. 2000年第5期. 15–18.

[2] 上海交通大学数学系. 欧拉的四面体问题.《数学实验》课程案例库. http://www.math.sjtu.edu.cn/jidi/sxsy/yyal/anli18/guocheng.htm.

[3] M. Shifman. You Failed Your Math Test. Comrade Einstein. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2005.

(上接第6–34页)

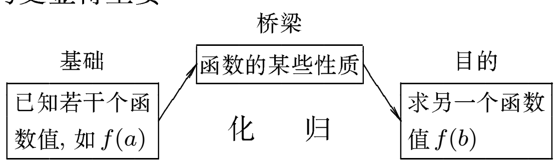
先应弄清楚问题的本质—这是怎样的一类问题, 它和以往遇到的问题有什么异同. 笔者认为, “借值求值”的本质是:

1. “借值求值”不企求通过求出函数解析式来求某函数值, 即思路2.

2. 至少有一个函数值 $f(a)$ 是已知的或是容易找到的, 这是“借”的基础.

3. 函数还应该有某些性质, 这些性质往往是奇偶性、对称性、周期性等, 这好象一座“桥”, 把已知函数值 $f(a)$ 和所求函数值 $f(b)$ 联系起来.

这样就揭示了这类习题的本质. 这比解题技巧更显得重要.



如果A老师在这节课想集中讲解“借值求值”一类问题的话, 那就需要重新整理各个例题. 要有些简单的, 光用奇偶性、周期性就能够解决的习题; 接着安排难一点的. 讲解时, 还需突出数学的化归思想.