几何图形的相似

200062　华东师范大学数学系　林　磊

几何图形间的相似这一概念是中学数学中众多几何概念之一, 但是问及这一概念的确切含义, 回答总是不能令人满意. 有的人用三角形相似的判别条件来代替相似的概念, 有的则给出描述性的刻画: 两图形相似是指它们形状相同大小不同. 如果举一特殊的例子再次询问: 抛物线 $y=10x^2$ 与 $y=x^2$ 相似吗? 则十有八九回答不相似. 问其理由, 则回答说这两条抛物线的开口大小不同! 说明我们对于相似这一概念的掌握基本停留在经验的基础上. 但是无界的图形超出了经验的范围, 从而有必要从图形变换的角度了解相似的确切概念.

一、图形的变换

新颁布的高中数学课程标准中有一个主题, 叫作“矩阵与变换”, 主要介绍平面上以矩阵形式给出的图形变换.

例1　给定向量 $\gamma=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$, $\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 是平面上的任意一点, 定义 $\mathbb{R}^2$ 上的变换 $\mathcal{T}$:

$$\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\mathcal{T}(\alpha)=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

则 $\mathcal{T}$ 称为由 $\gamma=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ 所确定的平移变换. 记作 $\mathcal{T}_\gamma$, 即 $\mathcal{T}_\gamma(\alpha)=\alpha+\gamma$.

例2　设 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ 是一个2阶实系数矩阵. $\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 是平面上的任意一点, 定义变换 $\mathcal{A}$ 如下:

$$\alpha=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\mathcal{A}(\alpha)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}.$$

则称 $\mathcal{A}$ 是由矩阵 A 确定的变换.

如果对平面图形 Ω 上所有点都施行同一个变换 $\mathcal{A}$, 变换后的所有点构成图形 Ω', 那么记 $\mathcal{A}(\Omega)=\Omega'$.

例3　如果平面图形 Ω 是由点 A、B、C、D 所确定的一面三角形旗帜(如图1),

(1)取向量 $\gamma=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, 定义平移变换

$$\mathcal{T}_\gamma:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Ω 经 $\mathcal{T}_\gamma$ 变换后的效果见图2.

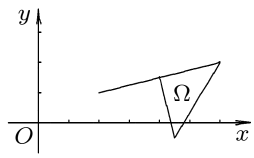

图 1

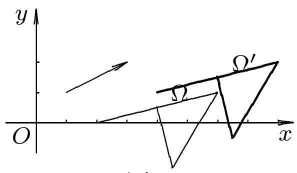

图 2

(2)如果取矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$A_3=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad A_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},$$

$$A_5=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}=\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix},$$

$$A_6=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&-\sin\frac{\pi}{2}\\\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

我们按照例1的方式分别定义变换

$$\mathcal{A}_i:\ \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto A_i\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},\quad i=1、2、3、4、5、6.$$

则图形 Ω 经变换 $\mathcal{A}_1$、$\cdots$、$\mathcal{A}_6$ 变换后的效果分别参见图3～图8.

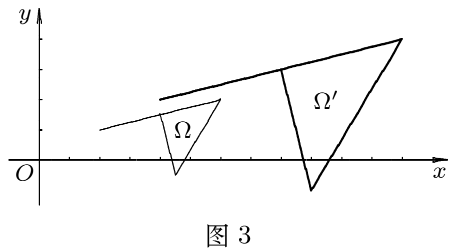

图 3

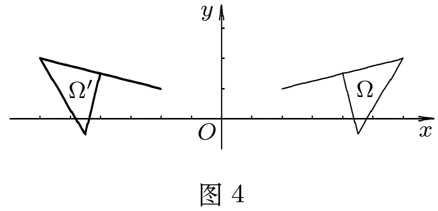

图 4

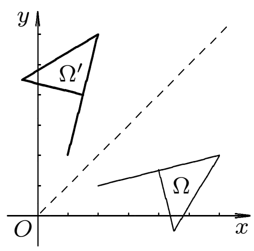

图 5

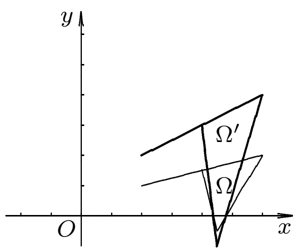

图 6

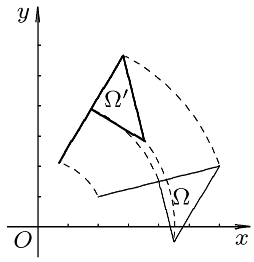

图 7

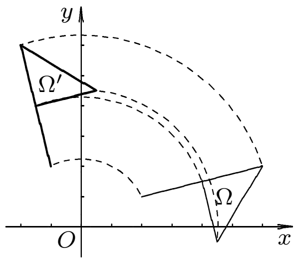

图 8

对于$\mathbb{R}^2$上的任意两个变换$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$, 可以定义它们的复合(也称为乘积)$\mathcal{AB}$如下

$$\mathcal{AB}:\quad \alpha \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{B}(\alpha)),\quad \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

即$\mathcal{A}$与$\mathcal{B}$的复合就是先施行变换$\mathcal{B}$, 然后再施行变换$\mathcal{A}$.

对于例3中的变换$\mathcal{A}_2$与$\mathcal{A}_3$, 设其复合$\mathcal{C}=\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3$. 则$\mathcal{C}$所对应的矩阵为

$$C = A_2A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A_6.$$

于是, 我们有: $\mathcal{A}_2\mathcal{A}_3=\mathcal{A}_6$.

同理, $\mathcal{A}_5\mathcal{A}_5=\mathcal{A}_6$.

例3(2)的变换$\mathcal{A}_2$是将图形Ω以y轴为对称轴作轴对称变换, $\mathcal{A}_3$是将图形Ω以直线$y=x$为对称轴作轴对称变换. 我们将平面上以过原点, 且关于x轴的倾角为θ的直线为对称轴的轴对称变换称为$\mathbb{R}^2$的反射变换, 记为$\mathcal{S}_\theta$. 因此$\mathcal{A}_2$和$\mathcal{A}_3$可分别记为$\mathcal{S}_{\frac{\pi}{2}}$和$\mathcal{S}_{\frac{\pi}{4}}$.

例3(2)的变换$\mathcal{A}_5$和$\mathcal{A}_6$分别是将图形Ω按逆时针方向绕原点旋转$\dfrac{\pi}{4}$和$\dfrac{\pi}{2}$. 我们将平面上按逆时针方向绕原点旋转ϕ角的变换称为$\mathbb{R}^2$上的旋转变换, 记为$\mathcal{R}_\phi$. 因此$\mathcal{A}_5$和$\mathcal{A}_6$可分别记作$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{4}}$和$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}$.

借助于图象, 我们容易验证:

(1)$\mathbb{R}^2$上的平移变换$\mathcal{T}_\gamma$、反射变换$\mathcal{S}_\theta$和旋转变换$\mathcal{R}_\phi$都是可逆的, 它们的逆变换分别是$\mathcal{T}_{-\gamma}$、$\mathcal{S}_\theta$和$\mathcal{R}_{-\phi}$.

(2)$\mathbb{R}^2$上的平移变换的复合仍是平移变换, 并且有$\mathcal{T}_{\gamma_1}\mathcal{T}_{\gamma_2}=\mathcal{T}_{\gamma_1+\gamma_2}$.

(3)$\mathbb{R}^2$上的反射变换、旋转变换的复合仍是反射变换或旋转变换, 且满足

$\mathcal{R}_{\phi_2}\mathcal{R}_{\phi_1}=\mathcal{R}_{\phi_1+\phi_2}$, 示意图如图9,

$\mathcal{R}_{\phi}\mathcal{S}_{\theta}=\mathcal{S}_{\theta+\frac{\phi}{2}}$, 示意图如图10,

$\mathcal{S}_{\theta}\mathcal{R}_{\phi}=\mathcal{S}_{\theta-\frac{\phi}{2}}$, 示意图如图11,

$\mathcal{S}_{\theta_2}\mathcal{S}_{\theta_1}=\mathcal{R}_{2\theta_2-2\theta_1}$, 示意图如图12.

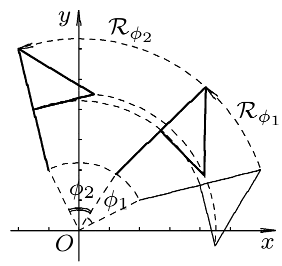

图 9

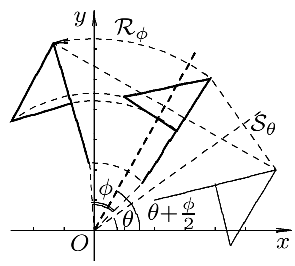

图 10

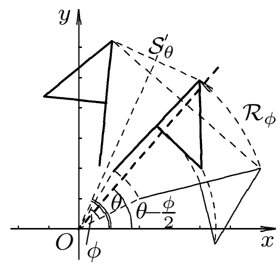

图 11

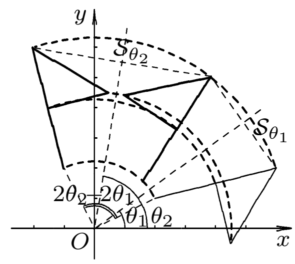

图 12

若对于任意的向量α、$\beta\in\mathbb{R}^2$, 有

$$|\mathcal{A}(\alpha)-\mathcal{A}(\beta)|=|\alpha-\beta|,$$

则称$\mathcal{A}$是$\mathbb{R}^2$上的等距变换. 等距变换就是保持任意两点间距离不变的变换, 可以证明:

平面上的任意一个等距变换可以化为反射变换与平移变换的复合, 或者旋转变换与平移变换的复合之一(见图13、图14).

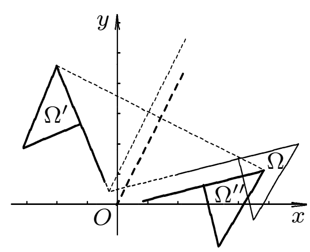

图 13

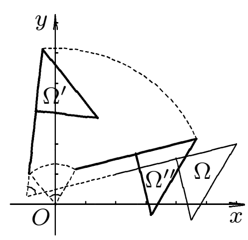

图 14

显然, $\mathbb{R}^2$上的恒等变换是等距变换, 等距变换的乘积仍是等距变换.

二、图形的全等和相似

设Ω_1, Ω_2是$\mathbb{R}^2$的两个图形, 若存在$\mathbb{R}^2$上的等距变换$\mathcal{A}$, 使得$\mathcal{A}(\Omega_1)=\Omega_2$, 则称$\Omega_1$与$\Omega_2$是全等的. 记作$\Omega_1\cong\Omega_2$.

由于$\mathbb{R}^2$上的恒等变换是等距变换, 等距变

换的逆变换还是等距变换, 以及两个等距变换的乘积仍为等距变换, 因此, 图形间的全等关系满足自反性、对称性以及传递性, 从而全等关系是一个等价关系.

了解了图形全等的概念之后, 我们很容易得出图形间相似的概念. 为此, 我们先来介绍一下数乘变换的概念.

给定实数k, 定义$\mathbb{R}^2$上的变换$\mathcal{M}_k$如下:

$$\mathcal{M}_k:\ \alpha \mapsto k\alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^2.$$

称变换$\mathcal{M}_k$为由k所确定的数乘变换.

例如: 例3中的变换$\mathcal{A}_1$就是由2所确定的数乘变换$\mathcal{M}_2$.

现在我们可以给出图形间相似的定义了.

设Ω_1与Ω_2是$\mathbb{R}^2$的两个图形. 若存在$\mathbb{R}^2$的等距变换$\mathcal{A}$以及数乘变换$\mathcal{M}_k\,(k>0)$, 使得

$$(\mathcal{M}_k\mathcal{A})(\Omega_1) = \Omega_2,$$

则称图形Ω_1与Ω_2是相似的, 记作$\Omega_1 \backsim \Omega_2$.

由于$\mathcal{M}_1$是恒等变换, 因此如果两个图形全等, 则它们也是相似的. 即全等是相似的特例. 又可以证明相似变换的逆变换存在, 也是相似变换, 相似变换的复合是相似变换. 所以可知, 图形间的相似关系也是等价关系.

有了相似的精确概念, 我们现在可以根据这一概念来考察抛物线之间的相似问题了. 设Ω_1是任意一条抛物线, 而Ω_2是由方程$y=x^2$所确定的一条"标准"抛物线(见图15). 设P为抛物线Ω_1的顶点.

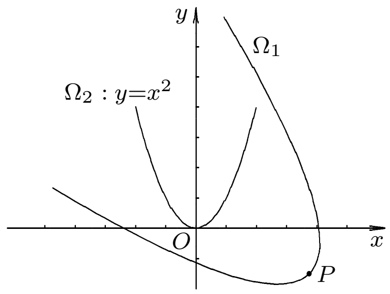

图 15

首先对Ω_1施行平移变换$\mathcal{T}_\gamma$, 这里的$\gamma = -\overrightarrow{OP}$, 则抛物线$\Omega_1' = \mathcal{T}_\gamma(\Omega_1)$的顶点移至原点$O$. 设$\Omega_1'$的对称轴为$l$. 则通过旋转变换, 可以将$l$变换到与$y$轴重合, 且使得$\Omega_1'$经该变换后的抛物线$\Omega_1''$开口向上(见图16). 因此, 我们可以假设$\Omega_1''$的定义方程为$y=kx^2\,(k>0)$. 下面我们来证明: $\mathcal{M}_k(\Omega_1'') = \Omega_2$.

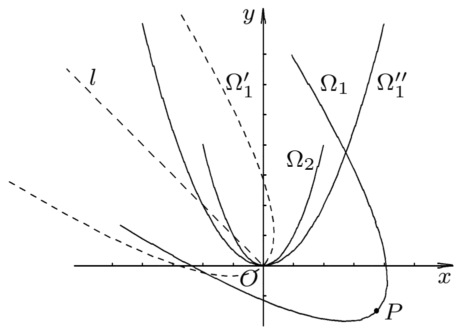

图 16

设$\alpha = (x_1, y_1) \in \Omega_1''$, 则$y_1 = kx_1^2$. 于是, $ky_1 = (kx_1)^2$. 从而$k\alpha = (kx_1, ky_1) \in \Omega_2$. 因此$\mathcal{M}_k(\alpha) = k\alpha \in \Omega_2$, 即$\mathcal{M}_k(\Omega_1'') \subseteq \Omega_2$.

反之, 如果$\beta = (x_2, y_2) \in \Omega_2$, 则$y_2 = x_2^2$. 令$x_1 = k^{-1}x_2$, $y_1 = k^{-1}y_2$, $\alpha = (x_1, y_1)$, 那么$x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$, 故$ky_1 = (kx_1)^2$, 所以$y_1 = kx_1^2$, 于是$\alpha \in \Omega_1''$, 且$\mathcal{M}_k(\alpha) = \beta$. 因此$\Omega_2 \subseteq \mathcal{M}_k(\Omega_1'')$. 从而$\mathcal{M}_k(\Omega_1'') = \Omega_2$.

由于$\Omega_1 \backsim \Omega_1'$, $\Omega_1' \backsim \Omega_1''$, $\Omega_1'' \backsim \Omega_2$, 因此由相似关系的传递性得: $\Omega_1 \backsim \Omega_2$. 所以每条抛物线都与标准抛物线$\Omega_2$相似. 由于相似是图形间的等价关系, 我们就证明了

定理 平面上的任何两条抛物线都是彼此相似的.

根据图形相似的上述定义, 我们不仅可以讨论抛物线的相似性, 也可以考虑其他图形的相似问题, 例如: 椭圆或者双曲线. 由于双曲线的问题相比椭圆较简单, 我们就以一个椭圆的例子来结束本文.

例4 设有两椭圆Ω_1: $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{18} = 1$与$\Omega_2$: $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. 问$a$取何值时这两个椭圆相似?

解: 显然这两个椭圆的中心都在原点, 对称轴都是坐标轴. 我们分两种情形来讨论:

情形一: $0<a<18$. 此时, 两椭圆的长轴均为y轴. 于是, 若Ω_1与Ω_2相似, 则必有$k>0$, 使得$\mathcal{M}_k(\Omega_1) = \Omega_2$. 而椭圆$\mathcal{M}_k(\Omega_1)$的定义方程为$\dfrac{x^2}{ak^2} + \dfrac{y^2}{18k^2} = 1$. 于是, $ak^2 = 4$, $18k^2 = 9$, 从而$\dfrac{a}{18} = \dfrac{4}{9}$. 所以, $a = 8$.

情形二: $a>18$. 此时, Ω_1的长轴为x轴. 因

(下转第1–8页)

(上接第1–19页)

此, 设$\Omega_1' = \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}(\Omega_1)$, 则$\Omega_1'$的定义方程为$\dfrac{x^2}{18} + \dfrac{y^2}{a} = 1$. 与情形一类似, 设$\mathcal{M}_k(\Omega_1') = \Omega_2$, 则$\dfrac{a}{18} = \dfrac{9}{4}$. 于是, $a = \dfrac{81}{2}$.

所以, 仅当$a = 8$或$a = \dfrac{81}{2}$时椭圆Ω_1与Ω_2才相似.

参考文献

[1] 陈志杰主编. 高等代数与解析几何(上、下册). 高等教育出版社. 施普林格出版社. 2000年.