第五章　线性空间与欧几里得空间　自测题

一、填空题

1. 对欧几里得空间V中的任意向量α, β, 有

$$|(\alpha, \beta)| \ 6 \ |\alpha|\,|\beta|,$$

而且等号成立当且仅当______________.

2. 设W_1与W_2是V的两个线性子空间, 如果$W_1 + W_2$中的每个向量α都可唯一地被表成

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_1 \in W_1,\ \alpha_2 \in W_2,$$

这称$W_1 + W_2$为这两个子空间的______________.

3. 两个同构的线性空间的维数______________.

4. 第二类正交变换的行列式的值等于______________.

5. 如果A是正交矩阵. 若k为实数, 使kA为正交矩阵, 则k等于______________.

二、选择题

6. 下列R^n的子集中是R^n的子空间的为

(A) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in \mathrm{Z},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$;

(B) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 a_2 = 0\}$;

(C) $\{(a_1, 0, \ldots, 0, a_n) \mid a_1, a_n \in \mathrm{R}\}$;

(D) $\{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \ 6 \ 1\}$.

7. 全体正实数的集合R^+对于下面定义的加法与标量乘法: $a \oplus b = ab$, $k \circ a = a^k$构成R上的线性空间, 则R^+的零元素为

(A) 0;　　(B) 1;　　(C) 2;　　(D) 3.

8. 若A是正交矩阵, 则下列矩阵中仍为正交矩阵的是(多重选择, 其中k为不等于± 1的整数.)

(A) kA;

(B) A^k;

(C) 交换A的任意两行所得的矩阵;

(D) 把A的某行k倍加到另一行所得的矩阵.

9. 设A是欧几里得空间V关于基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的度量矩阵, 则$A$满足以下哪个条件时, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是规范正交基?

(A) A是正交矩阵;　　(B) A为对称矩阵;

(C) A^{-1}为正交矩阵;　(D) A为单位矩阵.

10. 以下哪个结论不是两个线性子空间W_1与W_2的和$W_1 + W_2$为直和的等价命题:

(A) $\dim(W_1 + W_2) > \dim W_1$且$\dim(W_1 + W_2) > \dim W_2$;

(B) $W_1 \cap W_2 = 0$;

(C) $\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$;

(D) 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$是$W_1$的一个基, $\beta_1, \ldots, \beta_n$是W_2的一个基, 则$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$线性无关.

三、判断题

11. 欧几里得空间中任一基下的度量矩阵必为实对称矩阵. (　　)

12. 正交变换保持向量间的夹角不变. (　　)

13. 在R^3中, 对向量$\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$规定$(\alpha, \beta) = a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3$, 则$\mathrm{R}^3$关于这一实函数成为欧几里得空间. (　　)

14. 当数域K和非空集合V固定时, 只有唯一的一种方法定义线性空间. (　　)

四、计算题

15. 集合$V_1 = \{\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 - a_2 + a_3 - a_4 = 0\}$与$V_2 = \{\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$是$\mathrm{R}^4$的两个子空间, 找出$V_1 \cap V_2$的一个基, 并求$V_1 \cap V_2$的维数.

16. 设U与W分别是R^4的由$\alpha_1 = (1, 1, 0, -1)$, $\alpha_2 = (1, 2, 3, 0)$, $\alpha_3 = (2, 3, 3, -1)$与$\beta_1 = (1, 2, 2, -2)$, $\beta_2 = (2, 3, 2, -3)$, $\beta_3 = (1, 3, 4, -3)$生成的子空间, 求$U + W$及$U \cap W$的基和维数.

17.在欧几里得空间中求以下各组向量的长度和夹角.

(1) $\alpha = (3, 1, 1, 1)$, $\beta = (1, 0, 1, 2)$;

(2) $\alpha = (1, 1, 1, 2)$, $\beta = (3, 1, -1, 0)$.

18. 求由欧几里得空间R^4中的向量$\alpha_1 = (1, 2, 2, -1)$, $\alpha_2 = (1, 1, -5, 3)$, $\alpha_3 = (3, 2, 8, -7)$所生成的子空间的规范正交基.

19. 在标准欧几里得空间R^4中, 求向量$\beta = (3, 3, -5, 2)$在由向量$\alpha_1 = (-2, 1, -2, 3)$, $\alpha_2 = (1, 2, -3, 2)$, $\alpha_3 = (2, 2, -3, 1)$生成的子空间上的正交投影β'.

五、证明题

20. 设U是n维线性空间V的非平凡子空间. 证明: 存在V的不止一个子空间W, 使$V = U \oplus W$.

21. 设$A = (a_{ij}) \in M_n(\mathrm{R})$为正交矩阵, 且$|A| = -1$. 证明: $a_{ij} = -A_{ij}$, 这里A_{ij}是a_{ij}的代数余子式.

22. 设$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m$为欧几里得空间$V$的两组向量. 证明: 如果$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j)$, $i, j = 1, \ldots, m$, 则子空间$V_1 = L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$与$V_2 = L(\beta_1, \ldots, \beta_m)$同构.

23. 设$V_1, V_2, \ldots, V_s$是欧几里得空间V的子空间, $W = V_1 + V_2 + \cdots + V_s$. 若$V_1, V_2, \ldots, V_s$两两正交, 证明: $W = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$.