代数基础习题解答

第一章　模

1.1 设 M 是 R 模, 令 $\mathrm{Ann}(M) = \{b \in R \mid bx = 0$ 对所有的 $x \in M\}$, 称为 M 的零化子. 试证 $\mathrm{Ann}(M)$ 是 R 的理想. 如果 $C \subset \mathrm{Ann}(M)$ 也是 R 的理想, 则定义 $(a+C)x = ax$ 可使 M 成为 R/C 模.

证明 对任意的 $a,\, b \in \mathrm{Ann}(M)$, $r \in R$, $x \in M$, 有 $(a-b)x = ax - bx = 0$, $(ra)x = r(ax) = r0 = 0$, 所以 $a-b$, $ra \in \mathrm{Ann}(M)$, 从而 $\mathrm{Ann}(M)$ 是 R 的理想.

若 $a+C = b+C$, 则 $a-b \in C$, 即任给 $x \in M$, 有 $(a-b)x = 0$, 所以 $ax = bx$, 从而 $(a+C)x = (b+C)x$. 故定义与代表元选取无关. $\forall a,\, b \in R$, $x,\, y \in M$, $(a+C)(x+y) = a(x+y) = ax+ay = (a+C)x+(a+C)y$, $((a+C)+(b+C))x = ((a+b)+C)x = (a+b)x = ax+bx = (a+C)x+(b+C)x$, $((a+C)(b+C))x = (ab+C)x = (ab)x = a(bx) = (a+C)((b+C)x)$, $(1+C)x = 1x = x$. 故 M 成为 R/C 模.

1.2 设 $V = \mathbb{R}^n$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的 n 维向量空间, T 是 V 的线性变换, 定义为

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \longmapsto Tx = (0, x_1, \cdots, x_{n-1}).$$

按照例 1.3 所述, 可以把 V 看成 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模, 试计算

(a) λx;

(b) $(\lambda^2+2)x$;

(c) $(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+1)x$.

又满足 $\lambda^2 x = 0$ 的 x 是怎样的?

解答 (a) $\lambda x = Tx = (0, x_1, \cdots, x_{n-1})$.

(b) $(\lambda^2+2)x = (T^2+2)x = T^2x + 2x = (0,0,x_1,\cdots,x_{n-2}) + (2x_1, 2x_2, \cdots, 2x_n) = (2x_1, 2x_2, x_1+2x_3, \cdots, x_{n-2}+2x_n)$.

(c) $(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}+\cdots+1)x = T^{n-1}x + T^{n-2}x + \cdots + x = (0,\cdots,0,x_1) + (0,\cdots,0,x_1,x_2) + \cdots + (x_1, x_2, \cdots, x_n) = (x_1, x_1+x_2, x_1+x_2+x_3, \cdots, x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

又从 $\lambda^2 x = T^2 x = (0,0,x_1,\cdots,x_{n-2}) = 0$ 得: $x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0$, 故 $x = (0,\cdots,0,x_{n-1},x_n)$.

1.3 对于练习 1.2 中的 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模 V, 确定练习 1.1 中定义的 $\mathrm{Ann}(V) =$?

解答 $\mathrm{Ann}(V) = (\lambda^n)$. 这是因为 $\lambda^n x = 0$, $\forall x \in V$, 从而 $\lambda^n \in \mathrm{Ann}(V)$. 而 $\mathrm{Ann}(V)$ 是 $\mathbb{R}[\lambda]$ 的理想, 从而 $(\lambda^n) \subseteq \mathrm{Ann}(V)$. 又任给 $f(\lambda) \in \mathrm{Ann}(V)$, 则存在 $q(\lambda)$, $r(\lambda) \in \mathbb{R}[\lambda]$, 使 $f(\lambda) = \lambda^n q(\lambda) + r(\lambda)$, 且 $r(\lambda) = a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$, 其中 $a_i \in \mathbb{R}$. 由 λ^n, $f(\lambda) \in \mathrm{Ann}(V)$ 得 $r(\lambda) \in \mathrm{Ann}(V)$, 从而 $r(\lambda)x = 0$, $\forall x \in V$, 由此可得 $r(\lambda) = 0$, 从而 $f(\lambda) \in (\lambda^n)$, 即 $\mathrm{Ann}(V) = (\lambda^n)$.

1.4 对于练习 1.2 中的 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模 V, 令 $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, 证明 $V = \mathbb{R}[\lambda]e_1$, 从而 V 是一个循环模.

证明 显然, $\lambda^k e_1 = T^k e_1 = e_{1+k}$, $k = 1, \cdots, n-1$, 从而 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in \mathbb{R}[\lambda]e_1$. 而 $\mathbb{R}[\lambda]e_1$ 是模, 故 $V = \mathbb{R}[\lambda]e_1$.

1.5 证明当 R 是整环时例 1.13 中定义的 $T(M)$ 确实是 M 的子模. 试举一例说明当 R 不是整环时 $T(M)$ 可能不是子模.

证明 任给 x, $y \in T(M)$, 则存在非零 a_1, $a_2 \in R$, 使 $a_1x = a_2y = 0$. 而 a_1a_2 为 R 中非零元, 且使

$$a_1a_2(x-y) = (a_1a_2)x - (a_1a_2)y = a_2(a_1x) - a_1(a_2y) = 0.$$

故 $x - y \in T(M)$. 又任给 $r \in R$, 则

$$a_1(rx) = (a_1r)x = (ra_1)x = r(a_1x) = 0.$$

故 $rx \in T(M)$. 即 $T(M)$ 是 M 的子模.

取 $R = M = \mathbb{Z}_6$, 则 $T(M) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. 显然 $T(M)$ 不是子模 (例如: $\bar{2} + \bar{3} \notin T(M)$).

1.6 设 M 是非零有限 Abel 群, 问 M 能成为 $\mathbb{Q}$ 模吗? 这里 $\mathbb{Q}$ 是有理数域.

解答 M 不能成为 $\mathbb{Q}$ 模. 反证: 若 M 成为 $\mathbb{Q}$ 模, 设 $|M| = n \geqslant 2$, 则任给 $y \in M$, 有 $ny = 0$. 取定 $0 \neq x \in M$. 令 $\frac{1}{n}x = y \in M$, 则 $0 = ny = n\left(\frac{1}{n}x\right) = \left(n \cdot \frac{1}{n}\right) \cdot x = 1 \cdot x = x$, 矛盾!

1.7 试证非零模 M 为单模当且仅当 M 是由它的任一非零元素生成的循环模.

证明 若非零 R 模为单模, 则对任一非零元 $x \in M$, 显然 Rx 是 M 的非零子模, 故 $Rx = M$, 即 M 由其任一非零元素所生成.

反之, 若 M 是由其任一非零元素生成的循环模. 设 N 是 M 的任一非零子模, 则任取 $0 \neq x \in N$, 则 $Rx = M$. 又 $Rx \subseteq N$, 故 $N = M$, 即 M 是单模.

1.8 当 $n > 1$ 时试判定练习 1.2 中的 $\mathbb{R}[\lambda]$ 模 V 是否单模, 并说明理由.

解答 当 $n > 1$ 时, $\mathbb{R}[\lambda]$ 模 V 不是单模. 这是因为 $\mathbb{R}[\lambda]e_n = \mathbb{R}e_n$ 是 V 的非零真子模.

1.9 试举一例以说明有限生成 R 模不一定是有限生成 Abel 群.

解答 取 $R = M = \mathbb{Q}$, 则 M 是有限生成 R 模 (它由 1 生成), 但 M 不是有限生成 Abel 群. 这是因为对任意 r 个非零有理数 $\frac{m_1}{n_1}, \cdots, \frac{m_r}{n_r}$, $(m_i, n_i) = 1$, 则显然由这 r 个元生成的子群不可能包含形如 $\frac{m}{n}$ 的非零有理数, 其中 $(m, n) = 1$, $|n| > [n_1, \cdots, n_r]$, 故 M 不是有限生成 Abel 群.

2.1 设 M 是一个 R 模. 试证以下三个论断是等价的:

(a) $M = 0$;

(b) 对任意的 R 模 N 存在唯一的 R 模同态 $M \longrightarrow N$;

(c) 对任意的 R 模 N 存在唯一的 R 模同态 $N \longrightarrow M$.

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 显然, 因为 $0 \longrightarrow N$ 只有一个零同态.

(b) $\Rightarrow$ (c) 显然, 因为 $N \longrightarrow 0$ 只有一个零同态.

(b) $\Rightarrow$ (a) 反证. 设 $M \neq 0$, 取 $N = M$, 则 1_M: $M \longrightarrow N$ 以及 0: $M \longrightarrow N$ 均为 R 模同态, 但 $M \neq 0$, 故 $1_M \neq 0$, 矛盾于同态的唯一性, 故 $M = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a) 反证. 设 $M \neq 0$, 取 $N = M$, 则 1_N: $N \longrightarrow M$ 以及 0: $N \longrightarrow M$ 均为 R 模同态. 因 $M \neq 0$, 故 $1_N \neq 0$. 矛盾于同态的唯一性. 故 $M = 0$.

2.2 设 M 是一个 R 模. 试证以下三个论断是等价的:

(a) M 是单模;

(b) 任意的非零同态 $M \longrightarrow N$ 都是单同态;

(c) 任意的非零同态 $N \longrightarrow M$ 都是满同态.

证明 (a) $\Rightarrow$ (b) 若 M 是单模, η: $M \longrightarrow N$ 是非零同态, 则 $\operatorname{Ker}\eta \neq M$, 又 $\operatorname{Ker}\eta$ 是 M 的子模, 从而 $\operatorname{Ker}\eta = 0$, 即 η 是单同态.

(b) $\Rightarrow$ (a) 若 M 不是单模, 则 M 有非零真子模 K, 取 $N = M/K$, 则 $N \neq 0$, 且自然同态 π: $M \longrightarrow N$ 有 $\pi \neq 0$, 但 π 不是单同态.

(a) $\Rightarrow$ (c) 若 M 是单模, η: $N \longrightarrow M$ 是非零同态, 则 $\operatorname{Im}\eta$ 是 M 的非零子模, 而 M 单, 故 $\operatorname{Im}\eta = M$, 即 η 是满同态.

(c) $\Rightarrow$ (a) 若 M 不是单模, 任取 M 的一非零真子模 K, 令 $N = K$, η: $N \longrightarrow M$ 是嵌入同态, 则 $\eta \neq 0$, 且 $\operatorname{Im}\eta = N \neq M$, 故 η 不是满同态.

2.3 (Schur 引理) 证明若 M 和 N 都是单模, 则 M 到 N 的任一非零同态必是同构. 并证明若 M 是单模, 则 $\operatorname{Hom}_R(M, M)$ 是除环.

证明 若 η: $M \longrightarrow N$ 是非零同态, 则由习题 2.2, 由于 M 是单模, 故 2.2 (b) 成立, 即 η 是单同态. 又 N 是单模, 则由 2.2 (c) 知 η 是满同态, 即 η 是双射, 故 η 是同构.

当 M 单模时, $\operatorname{Hom}_R(M, M)$ 中非零同态就是同构, 从而 $\operatorname{Hom}_R(M, M)$ 中非零元全体关于乘法成群. 因此环 $\operatorname{Hom}_R(M, M)$ 是除环.

2.4 设 $f: M \longrightarrow N$ 是 R 模同态. 试证若 f 是单同态, 则有 $\operatorname{Ann}(M) \supseteq \operatorname{Ann}(N)$ (见练习 1.1 的定义); 若 f 是满同态, 则有 $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \operatorname{Ann}(N)$.

证明 任给 $a \in \operatorname{Ann}(N)$ 以及 $x \in M$, 则 $f(ax) = af(x) = 0$, 因 f 是单同态, 则 $ax = 0$, 从而 $a \in \operatorname{Ann}(M)$, 故 $\operatorname{Ann}(M) \supseteq \operatorname{Ann}(N)$.

若 f 是满同态, 则任给 $a \in \operatorname{Ann}(M)$, 对于任意 $y \in N$, 因 f 满, 故存在 $x \in M$, 使 $f(x) = y$, 从而

$$ay = af(x) = f(ax) = f(0) = 0.$$

即 $a \in \operatorname{Ann}(N)$. 于是 $\operatorname{Ann}(M) \subseteq \operatorname{Ann}(N)$.

2.5 设 $f: M \longrightarrow N$ 是 R 模满同态, K 是 M 的一个子模. 证明:

(1) 若 $K \cap \operatorname{Ker} f = 0$, 则 $f|_K : K \longrightarrow N$ 是单同态;

(2) 若 $K + \operatorname{Ker} f = M$, 则 $f|_K : K \longrightarrow N$ 是满同态;

证明 (1) 显然, 我们有 $\operatorname{Ker}(f|_K) = K \cap \operatorname{Ker} f$.又由已知 $K \cap \operatorname{Ker} f = 0$, 从而 $\operatorname{Ker}(f|_K) = 0$, 即 $f|_K$ 是单同态 (这里不用 f 是满的假设).

(2) 任给 $y \in N$, 因为 f 是满同态, 故存在 $x \in M$, 使 $f(x) = y$. 而由已知, $M = K + \operatorname{Ker} f$, 故存在 $k \in K$, $k' \in \operatorname{Ker} f$, 使 $x = k + k'$, 从而

$$f|_K(k) = f(k) = f(k) + f(k') = f(k + k') = f(x) = y.$$

即 $f|_K$ 是满同态.

2.6 证明对 R 模 M, 有 R 模同构 $\operatorname{Hom}_R(R, M) \cong M$.

证明 定义 $\phi : \operatorname{Hom}_R(R, M) \longrightarrow M$, $f \mapsto f(1)$, 则容易验证: $\phi(f + g) = \phi(f) + \phi(g)$, $\phi(af) = a\phi(f)$, $\forall\, f, g \in \operatorname{Hom}_R(R, M)$, $a \in R$. 从而 ϕ 是 R 模同态. 又任给 $x \in M$, 定义映射 $f : R \longrightarrow M$, $f(a) = ax$, 则易证 $f \in \operatorname{Hom}_R(R, M)$, 且 $\phi(f) = x$, 故 ϕ 是满同态. 又若 $\phi(f) = 0$, 则 $f(1) = 0$, 从而

$$f(a) = f(a \cdot 1) = af(1) = a \cdot 0 = 0, \quad \forall\, a \in R.$$

即 $f = 0$, 从而 ϕ 是单同态, 故 ϕ 是 R 模同构.

2.7 设 A 是一个 $\mathbb{Z}$ 模. 把以 n 为模的剩余类环记为 $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/(n) = \{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$. 证明

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, A) \cong A[m] = \{a \in A \mid ma = 0\}.$$

利用这个结果证明

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)},$$

这里 (m, n) 表示 m 和 n 的最大公因子.

证明 设 A 是 $\mathbb{Z}$ 模, 定义 $\phi : \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, A) \longrightarrow A[m]$, $f \mapsto f(\overline{1})$. 由于

$$mf(\overline{1}) = f(m\overline{1}) = f(\overline{m}) = f(\overline{0}) = 0,$$

故 $f(\overline{1}) \in A[m]$, 即 ϕ 是映射. 易证 $\phi(f+g)=\phi(f)+\phi(g)$, $\phi(bf)=b\phi(f)$, $\forall f,g \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, A)$, $b\in\mathbb{Z}$. 故 ϕ 是模同态. 又若 $\phi(f)=0$, 则 $f(\overline{1})=0$, 从而对任意 $\overline{n}\in\mathbb{Z}_m$, $f(\overline{n})=f(n\overline{1})=nf(\overline{1})=0$, 故 f 是单同态. 若 $a\in A[m]$, 定义 $f:\mathbb{Z}_m \longrightarrow A$, $f(\overline{n})=na$, 若 $\overline{n}=\overline{n'}$, 则 $n-n'\in(m)$, 故 $n-n'=sm$, 对某 $s\in\mathbb{Z}$, 从而 $(n-n')a=(sm)a=s(ma)=0$, 即 $na=n'a$, 从而 f 与代表元选取无关, 故 f 是映射. 易证 f 是 $\mathbb{Z}$ 模同态, 即 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m, A)$, 且 $\phi(f)=a$, 故 f 是满同态, 所以 f 是 $\mathbb{Z}$ 模同构.

利用上述结果, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n)\cong\mathbb{Z}_n[m]$. 而 $\mathbb{Z}_n[m]=\{\overline{a}\in\mathbb{Z}_n \mid m\overline{a}=\overline{0}\}$. 设 $d=(m,n)$, $m=m_1d$, $n=n_1d$, 则 $(m_1,n_1)=1$. $\overline{a}\in\mathbb{Z}_n[m] \iff m\overline{a}=\overline{0} \iff n\mid ma \iff n_1\mid m_1a \iff n_1\mid a$, 从而 $\mathbb{Z}_n[m]=\{\overline{0},\overline{n_1},\overline{2n_1},\cdots,\overline{(d-1)n_1}\}$.

设 $\mathbb{Z}_d=\{\overline{\overline{0}},\overline{\overline{1}},\cdots,\overline{\overline{d-1}}\}$, 则 $\psi:\overline{\overline{k}}\mapsto\overline{kn_1}$ 显然是 $\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Z}_d$ 与 $\mathbb{Z}_n[m]$ 间的同构, 结果得证.

2.8 试确定 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)$、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})$、 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$、$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})$ 以及 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$.

解答 据练习 2.6, 有 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_n)\cong\mathbb{Z}_n$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$.

而据练习 2.7, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n,\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}[n]=\{a\in\mathbb{Z}\mid na=0\}=\{0\}$.

下证: $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})=\{0\}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$. 任给 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Z})$, 设 $f(1)=a\in\mathbb{Z}$, 则对任意 $m/n\in\mathbb{Q}$, 其中 $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\geqslant 1$, 则 $f(m/n)=mf(1/n)$, 特别地, $nf(1/n)=f(1)=a$, 而 $f(1/n)\in\mathbb{Z}$, 故 $n\mid a$, $\forall n\in\mathbb{N}$. 从而 $a=0$. 由 $nf(1/n)=0$ 知 $f(1/n)=0$, 所以 $f(m/n)=0$, 即 $f=0$. 定义映射 $\phi:\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})\longrightarrow\mathbb{Q}$, $f\longmapsto f(1)$, 则易知 ϕ 是 $\mathbb{Z}$ 模同态. 若 $\phi(f)=0$, 即 $f(1)=0$, 则对任意 $\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$ (其中 $m,n\in\mathbb{Z}$), 有

$$f\left(\frac{m}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}\left(nf\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{m}{n}f(1)=0.$$

故 f 是单同态. 又任给 $r\in\mathbb{Q}$, 定义 $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$, $f(a)=ra$, 则显然 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q},\mathbb{Q})$, 且 $\phi(f)=r$, 所以, f 是满同态. 于是 f 是同构.

2.9 设 M 和 N 都是 $\mathbb{Z}$ 模, $\mathrm{Ann}(M)=m\mathbb{Z}$, $\mathrm{Ann}(N)=n\mathbb{Z}$, 那么 $\mathrm{Ann}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N))=d\mathbb{Z}$ (注意到零化子是整数环 $\mathbb{Z}$ 中的理想, 是由一个正整数生成的主理想). 证明 d 整除最大公因子 (m,n).

证明 我们知道, 存在整数 a,b, 使 $(m,n)=am+bn$. 任给 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N)$, 则对每个 $x\in M$, $((m,n)f)(x)=(m,n)f(x)=(am+bn)f(x)=(am)f(x)+(bn)f(x)=af(mx)+b(nf(x))=af(0)+b\cdot 0=0$, 从而, $(m,n)f=0$, 即 $(m,n)\in\mathrm{Ann}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,N))$. 于是, $(m,n)\in d\mathbb{Z}$, 所以, $d\mid(m,n)$.

2.10 设 R 是一个整环.

(1) 如果 $f:M\longrightarrow N$ 是 R 模同态, 证明 $f(T(M))\subseteq T(N)$. 从而 f 诱导了在 $T(M)$ 上的限制同态 $f_T:T(M)\longrightarrow T(N)$.

(2) 如果 $0\to K\xrightarrow{f}M\xrightarrow{g}N$ 是 R 模同态的正合列, 则序列 $0\to T(K)\xrightarrow{f_T}T(M)\xrightarrow{g_T}T(N)$ 也正合.

(3) 试举一例说明由正合列 $M\xrightarrow{g}N\to 0$ 导出的序列 $T(M)\xrightarrow{g_T}T(N)\to 0$ 不一定正合.

证明 (1) 任给 $x\in T(M)$, 则存在非零 $a\in R$, 使 $ax=0$, 从而 $af(x)=f(ax)=0$, 即 $f(x)\in T(N)$, 从而 $f(T(M))\subseteq T(N)$.

(2) 由于 f 是单射, 显然限制映射 f_T 也是单射. 由于 $\mathrm{Ker}\,g_T=\mathrm{Ker}\,g\cap T(M)$, $\mathrm{Im}\,f_T=f(T(K))$, 而由已知, $\mathrm{Ker}\,g=f(K)$, 故只要证 $f(K)\cap T(M)=f(T(K))$. 由(1)知, $f(T(K))\subseteq T(M)$, 故 $f(T(K))\subseteq f(K)\cap T(M)$. 又任给 $f(k)\in f(K)\cap T(M)$, 则存在非零 $a\in R$, 使 $af(k)=0$, 从而 $f(ak)=0$, 但是 f 是单同态, 故 $ak=0$, 所以 $k\in T(K)$, 于是 $f(k)\in f(T(K))$, 即 $f(K)\cap T(M)\subseteq f(T(K))$. 故 $\mathrm{Ker}\,g_T=\mathrm{Im}\,f_T$, 结论成立.

(3) 设 $R=\mathbb{Z}$. 显然, $\mathbb{Z}\xrightarrow{g}\mathbb{Z}_6\to 0$ 是正合列, 其中 g 是自然同态, 而 $T(\mathbb{Z})=\{0\}$, $T(\mathbb{Z}_6)=\mathbb{Z}_6$, 故 $T(\mathbb{Z})\xrightarrow{g_T}T(\mathbb{Z}_6)\to 0$ 显然不是正合列.

2.11 设有 R 模同态的交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

其中水平的两行都是正合列, 试证:

(1) 如果 α 是满的, β 和 δ 是单的, 则 γ 是单的;

(2) 如果 ε 是单的, β 和 δ 是满的, 则 γ 是满的;

(3) 如果 α、β、δ 和 ε 都是同构, 则 γ 也是同构.

证明 在上图中, 设水平两行的映射从左到右依次分别为 f, g, h, t 和 f', g', h', t'.

(1) 要证: 若 $c \in C$, 使 $\gamma(c) = 0$, 则 $c = 0$. 由于 $\gamma(c) = 0$, 所以 $h'\gamma(c) = 0$, 从而 $\delta h(c) = 0$, 而 δ 是单射, 故 $h(c) = 0$. 所以, $c \in \operatorname{Ker} h = \operatorname{Im} g$, 于是存在 $b \in B$, 使 $c = g(b)$. 得 $0 = \gamma g(b) = g'\beta(b)$, 从而 $\beta(b) \in \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'$. 即存在 $a' \in A'$, 使 $\beta(b) = f'(a')$. 由 α 是满射得 $a \in A$, 使 $\alpha(a) = a'$, 从而 $\beta(b) = f'\alpha(a) = \beta f(a)$. 而由 β 是单的得 $b = f(a)$. 所以, $c = g(b) = (gf)(a) = 0$. 即 γ 是单的.

(2) ε 单, β, δ 满. 任给 $c' \in C'$, 则 $h'(c') \in D'$. 由 δ 是满射得: 存在 $d \in D$, 使 $h'(c') = \delta(d)$. $0 = t'h'(c') = t'\delta(d) = \varepsilon t(d)$, 由 ε 是单射得 $t(d) = 0$. 从而 $d \in \operatorname{Ker} t = \operatorname{Im} h$, 于是存在 $c \in C$, 使 $d = h(c)$. 所以, $h'(c') = \delta h(c) = h'\gamma(c)$. 于是, $\gamma(c) - c' \in \operatorname{Ker} h' = \operatorname{Im} g'$. 从而存在 $b' \in B'$, 使 $\gamma c - c' = g'(b')$. 而 β 是满射, 故存在 $b \in B$, 使 $\beta(b) = b'$. 从而 $\gamma c - c' = g'\beta(b) = \gamma g(b)$. 所以, $\gamma(c - g(b)) = c'$. 因此, γ 是满射.

(3) 若 α, β, δ 和 ε 都是同构, 则 (1), (2) 的假设成立, 从而 γ 既是单射又是满射, 所以 γ 是同构.

2.12 (1) 如果 $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0$ 和 $0 \to C \xrightarrow{g} D \to E \to 0$ 都是 R 模同态的短正合列, 则 $0 \to A \to B \xrightarrow{gf} D \to E \to 0$ 也是正合列.

(2) 利用 (1) 的结果证明任何正合列都可由一系列短正合列粘结而成.

证明 (1) 设 $\alpha : A \longrightarrow B$, $\beta : D \longrightarrow E$ 为短正合列中的相应 R 模同态, 则由已知, α 是单射, 而 β 是满射. 故只要证明 $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Ker}(gf)$, $\operatorname{Im}(gf) = \operatorname{Ker} \beta$. 显然, $\operatorname{Ker} f \subseteq \operatorname{Ker}(gf)$. 故 $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \operatorname{Ker}(gf)$. 反之, 若有 $b \in \operatorname{Ker}(gf)$, 则 $gf(b) = 0$. 而 g 是单的, 故 $f(b) = 0$. 从而 $b \in \operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} \alpha$. 即 $\operatorname{Ker}(gf) = \operatorname{Im} \alpha$.

显然, $\operatorname{Im}(gf) \subseteq \operatorname{Im} g$. 若有 $g(c) \in \operatorname{Im} g$, 由于 f 是满射, 故存在 $b \in B$, 使 $f(b) = c$, 则 $g(c) = (gf)(b)$. 所以, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Im}(gf)$. 由 $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} \beta$ 得: $\operatorname{Im}(gf) = \operatorname{Ker} \beta$, 从而结论成立.

(2) 由于每个映射 $h : A \longrightarrow B$ 均可分解为 gf, 其中 $f : A \longrightarrow C$ 是满射, $G : C \longrightarrow B$ 是单射. 从而由 (1) 知任何正合列都可由一系列短正合列粘结而成.

2.13 (1) 设有有限循环 $\mathbb{Z}$ 模 $M = \mathbb{Z}_n$, 则必有如下短正合列:

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} M \to 0.$$

(即给出 $\mathbb{Z}$ 模同态 f 和 g 的定义.)

(2) 证明存在 $\mathbb{Z}$ 模的正合列:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0.$$

证明 (1) 定义 $f(a) = an$, 则显然 f 是 $\mathbb{Z}$ 模单同态. 定义 $g(a) = \overline{a}$, 则 g 是 $\mathbb{Z}$ 模满同态. 显然, $\operatorname{Im} f = n\mathbb{Z} = \operatorname{Ker} g$. 故上述序列为短正合列.

(2) 定义 $f:\mathbb{Z}_2\longrightarrow\mathbb{Z}_4$, $a+(2)\longmapsto 2a+(4)$, $g:\mathbb{Z}_4\longrightarrow\mathbb{Z}_4$, $a+(4)\longmapsto 2a+(4)$, $h:\mathbb{Z}_4\longrightarrow\mathbb{Z}_2$, $a+(4)\longmapsto a+(2)$. 则 f,g,h 都是 $\mathbb{Z}$ 模同态, 且 f 是单同态, h 是满同态, $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} g=\{(4),2+(4)\}=\operatorname{Im} g=\operatorname{Ker} h$.

2.14 试给出两个 $\mathbb{Z}$ 模同态短正合列的例子:

$$0\to A\to B\to C\to 0,\qquad 0\to A'\to B'\to C'\to 0,$$

使得

(1) $A\cong A'$, $B\cong B'$, $C\ncong C'$;

(2) $A\cong A'$, $B\ncong B'$, $C\cong C'$;

(3) $A\ncong A'$, $B\cong B'$, $C\cong C'$.

解答 (1) 令 $A=\mathbb{Z}_2$, $B=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_4$, $C=\mathbb{Z}_4$, A 到 B 的映射为 $\iota_1:x\longmapsto(x,0)$, B 到 C 的映射为 $\pi_2:(x,y)\longmapsto y$. 则显然 ι_1 是单同态, π_2 为满同态, 且 $\operatorname{Im}\iota_1=\operatorname{Ker}\pi_2$. 又令 $A'=A$, $B'=B$, $C'=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, A' 到 B' 的映射为 $f:\overline{a}\longmapsto(\overline{0},2a+(4))$, 而 B' 到 C' 的映射为 $g:(\overline{a},b+(4))\longmapsto(\overline{a},\overline{b})$, 从而 f,g 是同态, 且 f 单, g 满, $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} g$. 从而这样定义了两个短正合列, 使 $A\cong A'$, $B\cong B'$, 但 $C\ncong C'$.

(2) 取 $A=A'=C=C'=\mathbb{Z}_2$, $B=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, $B'=\mathbb{Z}_4$. 令 $\iota_1:A\longrightarrow B$, $\iota_1(a)=(a,0)$, $\pi_2:B\longrightarrow C$, $\pi_2(a,b)=b$. $f:A'\longrightarrow B'$, $f(\overline{a})=2a+(4)$. $g:B'\longrightarrow C'$, $g(b+(4))=\overline{b}$, 则两个序列都是短正合列, 且显然 $B\ncong B'$.

(3) 取 $A=\mathbb{Z}_4$, $A'=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, $B=B'=\mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2$, $C=C'=\mathbb{Z}_2$. 其中 $\iota_1:A\longrightarrow B$, $\iota_1(a)=(a,0)$, $\pi_2:B\longrightarrow C$, $\pi_2(a,b)=b$, $f:A'\longrightarrow B'$, $f(\overline{a},\overline{b})=(2a+(4),\overline{b})$, $g:B'\longrightarrow C'$, $g(a+(4),\overline{b})=\overline{a}$, 则两个序列都是短正合列, 且显然 $A\ncong A'$.

2.15 设有三个实向量空间 U、V 和 W, 其维数分别为1、3和2. 设 $\{u\}$ 是 U 的基底, $\{v_1,v_2,v_3\}$ 是 V 的基底, $\{w_1,w_2\}$ 是 W 的基底. $\mathbb{R}$ 同态 $f:U\to V$ 定义为 $f(\alpha u)=\alpha v_1+\alpha v_2$, $g:V\to W$ 定义为 $g(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\alpha_3v_3)=\alpha_1w_1+\alpha_3w_2$.

(1) 证明序列 $0\to U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g}W\to 0$ 在 U 和 W 正合, 但不在 V 正合.

(2) 证明存在 $g':V\to W$ 使得 $0\to U\xrightarrow{f}V\xrightarrow{g'}W\to 0$ 正合.

(3) 证明存在 $f':U\to V$ 使得 $0\to U\xrightarrow{f'}V\xrightarrow{g}W\to 0$ 正合.

证明 设 $f(\alpha u)=0$, 即 $\alpha v_1+\alpha v_2=0$, 而 v_1,v_2 线性无关, 故 $\alpha=0$, 即 f 是单射. 任给 $\alpha_1w_1+\alpha_2w_2\in W$, 则 $g(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2)=\alpha_1w_1+\alpha_2w_2$, 所以 g 是满射. 而 $\operatorname{Im} f=\{\alpha(v_1+v_2)\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{Ker} g=\{\alpha v_2\mid\alpha\in\mathbb{R}\}$, 所以两者不等, 即序列在 U 和 W 处正合, 在 V 处不正合.

(2) 由于 $V=\mathbb{R}(v_1+v_2)\oplus\mathbb{R}(v_1-v_2)\oplus\mathbb{R}v_3$, 即 v_1+v_2, v_1-v_2, v_3 为 V 的基, 定义 $g':V\to W$, $g'(\alpha_1(v_1+v_2)+\alpha_2(v_1-v_2)+\alpha_3v_3)=\alpha_2w_1+\alpha_3w_2$, 则易证 $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} g'=\mathbb{R}(v_1+v_2)$, 而 g' 是满同态, 故序列为正合列.

(3) 定义 $f':U\to V$, $f'(\alpha u)=\alpha v_2$, 则 f' 是单射, 且 $\operatorname{Im} f=\operatorname{Ker} g$, 故该序列正合.

2.16 设有如下由两个短正合行构成的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

如果其中 β 是同构, 证明 α 是单同态而 γ 是满同态. 而且 α 是满的当且仅当 γ 是单的.

证明 若 $\alpha(a)=0$, 则 $\beta f(a)=f'\alpha(a)=0$. 由于 β 是同构, 且 f 是单射, 故 $a=0$, 即 α 是单同态. 又任给 $c'\in C'$, 则存在 $b'\in B'$, 使 $g'(b')=c'$, 而 β 是同构, 所以存在 $b\in B$, 使 $\beta(b)=b'$, 从而 $\gamma(g(b))=g'\beta(b)=g'(b')=c'$. 于是 γ 是满同态.

若 α 是满的, 则若 $\gamma(c)=0$, 由于 g 满, 所以 $c=g(b)$, $0=\gamma g(b)=g'\beta(b)$. 故 $\beta(b)\in\operatorname{Ker}g'=\operatorname{Im}f'$, 存在 $a'\in A'$, 使 $\beta(b)=f'(a')$, 而 α 满, 故 $a'=\alpha(a)$, 对某 $a\in A$. 从而 $\beta(b)=f'\alpha(a)=\beta f(a)$, 又 β 是同构, 所以 $b=f(a)$, 从而 $0=gf(a)=g(b)=c$, 即 γ 是单射.

若 γ 是单射, 则任给 $a'\in A'$, $f'(a')\in B'$, 而 β 是同构, 故存在 $b\in B$, 使 $\beta(b)=f'(a')$, 则 $0=g'f'(a')=g'\beta(b)=\gamma g(b)$, 由假设 γ 是单射, 故 $g(b)=0$. 从而由 $b\in\operatorname{Ker}g=\operatorname{Im}f$ 得 $b=f(a)$, 对某 $a\in A$. 于是 $f'\alpha(a)=\beta f(a)=\beta(b)=f'(a')$. 又 f' 是单射, 故 $a'=\alpha(a)$, 即 α 是满射.

2.17 设有如下由三个短正合行构成的交换图:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & B' \arrow[r, "g'"] \arrow[d] & C' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d] & B'' \arrow[r, "g''"] \arrow[d] & C'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

如果中间一列是正合的, 证明最后一列为正合当且仅当第一列为正合.

证明 设三列的同态分别为 $\alpha',\alpha;\beta',\beta;\gamma',\gamma$.

$(\Longrightarrow)$ 若最后一列正合, 即 γ' 是单射, γ 是满射, 且 $\operatorname{Im}\gamma'=\operatorname{Ker}\gamma$, 要证 α' 是单射, α 是满射, 且 $\operatorname{Im}\alpha'=\operatorname{Ker}\alpha$. 若有 $\alpha'(a')=0$, 则 $\beta'f'(a')=f\alpha'(a')=0$, 由 f',β' 是单射得: $a'=0$, 即 α' 是单射. 任给 $a''\in A''$, 则 $f''(a'')\in B''$, 而 β 是满射, 故存在 $b\in B$, 使 $\beta(b)=f''(a'')$. 从而 $\gamma g(b)=g''\beta(b)=g''f''(a'')=0$, 所以 $g(b)\in\operatorname{Ker}\gamma$, 故存在 $c'\in C'$, 使 $g(b)=\gamma'(c')$, 而 g' 是满射, 故对 $c'\in C'$, 存在 $b'\in B'$, 使 $g'(b')=c'$, 从而 $g(b)=\gamma'(c')=\gamma'g'(b')=g\beta'(b')$, 即 $g(b-\beta'(b'))=0$, 于是 $b-\beta'(b')\in\operatorname{Ker}g=\operatorname{Im}f$, 故存在 $a\in A$, 使 $b-\beta'(b')=f(a)$. 所以,

$$f''\alpha(a)=\beta f(a)=\beta(b-\beta'(b'))=\beta(b)=f''(a'').$$

又 f'' 是单射, 故 $\alpha(a)=a''$. 于是 α 是满射. 任给 $a'\in A'$, $f''\alpha\alpha'(a')=\beta\beta'f'(a')=0$. 而 f'' 是单射, 故 $\alpha\alpha'(a')=0$, 即 $\operatorname{Im}\alpha'\subseteq\operatorname{Ker}\alpha$. 由若有 $a\in A$, 使 $\alpha(a)=0$, 则 $\beta f(a)=f''\alpha(a)=0$, 从而 $f(a)\in\operatorname{Ker}\beta=\operatorname{Im}\beta'$, 故存在 $b'\in B'$, 使 $f(a)=\beta'(b')$. $\gamma'g'(b')=g\beta'(b')=gf(a)=0$, 由 γ' 是单射, 所以 $g'(b')=0$, $b'\in\operatorname{Ker}g'=\operatorname{Im}f$, 存在 $a'\in A'$, 使 $b'=f'(a')$. 于是 $f(\alpha'(a'))=\beta'f'(a')=$

$\beta'(b')=f(a)$. 由 f 是单射得 $\alpha'(a')=a$, 于是 $\operatorname{Ker}\alpha\subseteq\operatorname{Im}\alpha$, 即 $\operatorname{Ker}\alpha=\operatorname{Im}\alpha'$. 因此, 第一列是正合的.

若第一列是正合的, 要证最后一列正合, 即要证 γ' 是单射, γ 是满射, 且 $\operatorname{Im}\gamma'=\operatorname{Ker}\gamma$. 任给 $c''\in C''$, 则存在 $b''\in B''$, 使 $g''(b'')=c''$. 对 b'', 存在 $b\in B$, 使 $b''=\beta(b)$, 所以, $\gamma(g(b))=g''\beta(b)=g''(b'')=c''$, 从而 γ 是满射. 若有 $c'\in C'$, 使 $\gamma'(c')=0$, 则存在 $b'\in B'$, 使 $c'=g'(b')$. $0=\gamma'(g'(b'))=g\beta'(b')$, 故 $\beta'(b')\in\operatorname{Ker}g=\operatorname{Im}f$, 则存在 $a\in A$, 使 $f(a)=\beta'(b')$. 故 $f''\alpha(a)=\beta f(a)=\beta\beta'(b')=0$. 于是由 f'' 是单射得: $\alpha(a)=0$. 由 $a\in\operatorname{Ker}\alpha=\operatorname{Im}\alpha'$ 得 $a=\alpha'(a')$, 对某 $a'\in A'$. 所以, $\beta'f'(a')=f\alpha'(a')=f(a)=\beta'(b')$. 又由 β' 的单性得 $f'(a')=b'$, 从而 $c'=g'(b')=g'f'(a')=0$. 即 γ' 是单射. 任给 $c'\in C'$, 则存在 $b'\in B'$, 使 $g'(b')=c'$, 故 $\gamma\gamma'(c')=\gamma\gamma'g'(b')=\gamma g\beta'(b')=g''\beta\beta'(b')=0$. 于是 $\operatorname{Im}\gamma'\subseteq\operatorname{Ker}\gamma$. 若有 $c\in\operatorname{Ker}\gamma$, 则 $\gamma(c)=0$, 而 g 是满射, 故存在 $b\in B$, 使 $g(b)=0$. $0=\gamma g(b)=g''\beta(b)$ 推出 $\beta(b)\in\operatorname{Ker}g''=\operatorname{Im}f''$, 故存在 $a''\in A''$, 使 $\beta(b)=f''(a'')$. 即 $\beta(b)=f''(a'')=f''\alpha(a)=\beta f(a)$, 对某 $a\in A$ 成立 (因 α 满射), 所以, $b-f(a)\in\operatorname{Ker}\beta=\operatorname{Im}\beta'$, 即存在 $b'\in B'$, 使 $b-f(a)=\beta'(b')$, 从而 $\gamma'(g'(b'))=g\beta'(b')=g(b-f(a))=g(b)=c$, 即 $c\in\operatorname{Im}\gamma'$, 所以, $\operatorname{Ker}\gamma\subseteq\gamma'$. 于是 $\operatorname{Ker}\gamma=\operatorname{Im}\gamma'$. 即第三列正合.

3.1 证明引理 3.1.

证明 若 $f(y)=0$, 则 $y=(gf)(y)=g(f(y))=0$, 即 f 是单同态. 任给 $y\in N$, 则 $y=1_Ny=g(f(y))$, 即 g 是满同态. 设 $x\in\operatorname{Im}f\cap\operatorname{Ker}g$, 则存在 $y\in N$, 使 $x=f(y)$. 又 $x\in\operatorname{Ker}g$, 故 $gx=0$, 从而 $0=gf(y)=y$. 故 $x=f(0)=0$. 所以, $\operatorname{Im}f\cap\operatorname{Ker}g=0$. 而任给 $x\in M$, 则 $x-fg(x)\in M$. 由于 $g(x-fg(x))=gx-(gf)(g(x))=gx-gx=0$, 从而 $x-fg(x)\in\operatorname{Ker}g$, 于是 $x\in\operatorname{Im}f+\operatorname{Ker}g$. 从而 $M=\operatorname{Im}f\oplus\operatorname{Ker}g$.

3.2 设 $M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n$, 验证典范射影 $\pi_i:M\longrightarrow M_i$ 与典范内射 $\iota_i:M_i\longrightarrow M$ 间满足下列关系:

(1) $\pi_i\iota_i=1_{M_i}$ 对 $i=1,\cdots,n$;

(2) $\pi_j\iota_i=0$ 对 $i\neq j$;

(3) $\iota_1\pi_1+\iota_2\pi_2+\cdots+\iota_n\pi_n=1_M$.

证明 (1) 任给 $x_i\in M_i$, 则 $\pi_i\iota_i(x_i)=\pi_i(\cdots,0,x_i,0,\cdots)=x_i$, 即 $\pi_i\iota_i=1_{m_i}$.

(2) $\pi_j\iota_i(x_i)=\pi_j(\cdots,0,x_i,0,\cdots 0=0$, 故 $\pi_j\iota_i=0$, 对 $i\neq j$.

(3) 任给 $x\in M$, 则 $x=(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,0,\cdots,0)+(0,x_2,\cdots,0)+\cdots+(0,0,\cdots,x_n)=\iota_1x_1+\iota_2x_2+\cdots+\iota_nx_n=(\iota_1\pi_1+\iota_2\pi_2+\cdots+\iota_n\iota_n)(x)$, 即 $\iota_1\pi_1+\iota_2\pi_2+\cdots+\iota_n\pi_n=1_M$.

3.3 设 M 是模, M_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是子模, $M=\sum M_i$, 并满足以下条件:

$$\begin{aligned}&M_1\cap M_2=0\\&(M_1+M_2)\cap M_3=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(M_1+\cdots+M_{n-1})\cap M_n=0\end{aligned}$$

则 $M=\oplus M_i$.

证明 根据命题 3.7, 只要证明 M 满足命题条件 (b) 即可. 若对某个 j, $1\leqslant j\leqslant n$, $M_j\cap M_j^*\neq 0$, 则存在 $0\neq -x_j\in M_j\cap M_j^*$. 因 $-x_j\in M_j^*$, 故 $-x_j=\sum_{i\neq j}x_i$, $x_i\in M_i$, 且因等式左边不为 0, 右边至少存在一个 i, 使 $x_i\neq 0$. 令使 $x_i\neq 0$ 的最大下标为 k, 若 $k<j$, 则 $-x_j\in(M_1+\cdots+M_{j-1})\cap M_j$, 矛盾! 否则, $k>j$, $-x_k=\sum_{i=1}^{k-1}x_i\in(M_1+\cdots+M_{k-1})\cap M_k$, 同样与假设矛盾! 所以条件 (b) 成立.

3.4 设 p 是素数, e 是正整数, 试证 $\mathbb{Z}/(p^e)$ 作为 $\mathbb{Z}$ 模不是两个非零子模的直和. 这一结论对 $\mathbb{Z}$ 是否正确?

证明 由于 $\mathbb{Z}/(p^e)$ 的任一子模 M 均有形式 $n\mathbb{Z}/(p^e)$, 其中 $(n) \supseteq (p^e)$, 即 $n \mid p^e$, 故 $n = p^k$, $0 \leqslant k \leqslant e$, 而 $M \neq 0 \iff 0 \leqslant k < e$. 设 $M_1 = p^{k_1}\mathbb{Z}/(p^e)$, $M_2 = p^{k_2}\mathbb{Z}/(p^e)$ 为 $\mathbb{Z}/(p^e)$ 的任两个非零子模, 则 $0 \leqslant k_1, k_2 < e$. 不妨设 $k_1 \leqslant k_2$, 则 $M_1 \supseteq M_2$, 从而 $M_1 \cap M_2 \neq 0$. 于是 $\mathbb{Z}/(p^e)$ 不可能是两个非零子模的直和.

若考虑 $\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Z}$, 由于 $\mathbb{Z}$ 的子模具有形式 (n). 而 $(mn) \subset (n) \cap (m)$. 从而 $\mathbb{Z}$ 也不能是两个非零子模的直和.

3.5 证明作为 $\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Z}_{mn} \cong \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ 当且仅当 m 与 n 互素.

证明 若 m 与 n 互素, 则定义 $f : \mathbb{Z}_{mn} \longrightarrow \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, $f(a + (mn)) = (a + (m), a + (n))$, 则 f 是 $\mathbb{Z}$ 模同态, 孙子定理保证了 f 是满射, 由于两边的集合元素相等, 故 f 是双射.

反之, 若 $(m, n) = d > 1$. 设 $m = m_1 d$, $n = n_1 d$, 则作为交换群, $\mathbb{Z}_{mn}$ 中元素 $1 + (mn)$ 的周期为 mn, 而任给 $x = (a + (m), b + (n)) \in \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$, $\frac{mn}{d}x = (mn_1 a + (m), m_1 nb + (n)) = 0$, 从而 $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ 中的任一元的周期均为 $\frac{mn}{d}$ $(< mn)$ 的因数, 从而两者不可能同构, 即作为 $\mathbb{Z}$ 模, $\mathbb{Z}_{mn}$ 与 $\mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$ 不同构.

4.1 设 F 是有限生成自由模. 证明若 f 是 F 的满射自同态, 则 f 是同构. 若 f 是单自同态时, 是否有 f 是同构?

证明 因为 F 是有限生成自由模, 故存在有限基 $e_1, \cdots, e_n$, 设 $fe_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} e_k$, $j = 1, \cdots, n$. 而 f 是满同态, 故可设 $e_i = \sum_j a_{ij} f e_j$, $i = 1, \cdots, n$, 其中 $a_{ij}, b_{jk} \in R$. 令 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{jk})$. 则由 $e_i = \sum a_{ij} b_{jk} e_k$ 得: $\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \cdots, n$. 即 $AB = I_n$. 从而 $\det A \cdot \det B = 1$, 故 B 可逆. 因此 f 是单同态 (据克莱姆法则), 所以 f 是同构. 若 f 是单同态, 则只能保证 $B = (b_{jk})$ 的行列式非零, 故 f 不一定是同构. 例如取 F 为 $\mathbb{Z}$ 模 $\mathbb{Z}$, 则 $\mathbb{Z}$ 是循环模, 也是自由模, 令 $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n$, 则 f 是单自同态, 但显然 f 不是满的.

4.2 设 M, N 是 m 秩和 n 秩的自由 R 模, 证明 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 是 mn 秩的自由模.

证明 分别设 $e_1, \cdots, e_m$, $f_1, \cdots, f_n$ 是 M 和 N 的基. 令 $\phi_{ij} \in \mathrm{Hom}(M, N)$, $\phi_{ij}(e_i) = f_j$, $\phi_{ij}(e_k) = 0$, $\forall\, k \neq i$. 则可证 $\phi_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$ 是 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 的基. 首先任给 $\phi \in \mathrm{Hom}(M, N)$, 设 $\phi(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j$, 则

$$(\phi - \sum_{i,j} a_{ij}\phi_{ij})(e_k) = \phi e_k - \sum_{i,j} a_{ij}\phi_{ij}(e_k) = \phi e_k - \sum_{j=1}^n a_{kj} f_j = 0.$$

于是 $\phi = \sum a_{ij}\phi_{ij}$. 又若 $\sum a_{ij}\phi_{ij} = 0$. 则 $0 = \sum_{i,j} a_{ij}\phi_{ij}(e_k) = \sum_j a_{kj} f_j$, 从而 $a_{kj} = 0$, 对所有 k, j. 于是 $\{\phi_{ij}\}$ 是 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 的基, 即为 mn 秩的自由模.

4.3 设 R 是整环, $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 是自由模 F 的基. 置 $f_i = \sum_j a_{ij} e_j$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 这里 $A = (a_{ij}) \in M_n(R)$. 证明 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ 构成由它生成的 F 的子模 K 的基的充要条件是 $\det A \neq 0$. 证明对任意的 $\overline{x} = x + K \in F/K$ 都有 $(\det A)\overline{x} = 0$.

证明 由于 $f_1, \cdots, f_n$ 生成子模 K, 故它构成 K 的基的充要条件是它线性无关, 即 $\sum_{i=1}^n x_i f_i = 0$ 无非零解. 而 $\sum_{i=1}^n x_i f_i = \sum_{i,j=1}^n x_i a_{ij} e_j = 0 \iff$ 齐次线性方程组 $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i = 0$, $j = 1, \cdots, n$ 无非零解, 即 $A'X = 0$ 无非零解. 而在 R 的分式域中 $A'X = 0$ 有非零解当且仅当 $\det A = \det A' = 0$, 且在有非零解时, 由于非零解必具有 $x = (\frac{p_1}{r}, \cdots, \frac{p_n}{r})$ 的形式, 其中 $r, p_i \in R$, $r \neq 0$. 故 $(p_1, \cdots, p_n)$ 也是它的非零解, 亦即 $A'X = 0$ 在 F 上有非零解 $\iff$ $A'X = 0$ 在 R 上有非零解. 故 $f_1, \cdots, f_n$ 构成 K 的基当且仅当 $\det A \neq 0$.

由于 $A\cdot A^* = A^*\cdot A = \det A\cdot I_n$, 其中 A^* 为 A 的伴随矩阵, 设 $A^* = (b_{ij})$, 则

$$\sum_{i=1}^n b_{ki}f_i = \sum_{i=1}^n b_{ki}\sum_{j=1}^n a_{ij}e_j = \sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n b_{ki}a_{ij}\right)e_j = \sum_{j=1}^n \delta_{kj}\det A\cdot e_j = \det A\cdot e_k.$$

即对任一 k, 有

$$\det A\cdot e_k = \sum_{i=1}^n b_{ki}f_i \in K.$$

因而 $(\det A)\overline{e_k} = 0$. 由于 $\{\overline{e_1},\cdots,\overline{e_n}\}$ 是模 F/K 的生成元集, 故对任意 $\overline{x}\in F/K$, 均有 $(\det A)\overline{x} = 0$.

4.4 证明 $\mathbb{Q}$ 不是自由 $\mathbb{Z}$ 模.

证明 显然 $\mathbb{Q}$ 不是循环模, 即对任意 $r\in\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}r\neq\mathbb{Q}$. 所以假设 $\mathbb{Q}$ 是自由 $\mathbb{Z}$ 模, 则其基的元素个数大于 1. 但是我们可证 $\mathbb{Q}$ 中任意两个元素均是 $\mathbb{Z}$ 线性相关的: 任给两非零元 $\frac{p}{m},\frac{q}{m}$, 其中 $m,p,q\in\mathbb{Z}$, 则由于

$$mq\cdot\left(\frac{p}{m}\right) + (-mp)\left(\frac{q}{m}\right) = 0.$$

故它们线性相关, 从而 $\mathbb{Q}$ 上不存在其元素个数大于 1 的线性无关组, 这与 $\mathbb{Q}$ 是自由 $\mathbb{Z}$ 模相矛盾! 故 $\mathbb{Q}$ 不是自由 $\mathbb{Z}$ 模.

4.5 如果自由 R 模的子模都是自由模, 证明 R 一定是主理想整环.

证明 考虑 R 本身作为 R 模. 任给 $r\in R$, $r\neq 0$. 则 Rr 是 R 的非零子模, 故它是自由模, 于是存在基 $\{e_\alpha\mid\alpha\in I\}$. 设对基中元素 $e_\alpha = ar$, 其中 $a\in R$. 则若存在 R 中非零元 b, 使 $br = 0$, 则 $be_\alpha = b(ar) = a(br) = 0$, 与 e_α 是基中元矛盾. 故 R 是整环. 设 M 是 R 的任一非零理想, 则 M 是 R 的子模, 故 M 是自由 R 模. 设 $\{e_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是它的基, 可证 $|I| = 1$. 不然, 设基中至少有两个元 e_α, e_β, 则因 $r = e_\alpha e_\beta\in M$, 且 $r = e_\alpha\cdot e_\beta = e_\beta\cdot e_\alpha$. 说明 r 表示成基中元的 R 线性组合时表示法不唯一. 这与 $\{e_\alpha\mid\alpha\in I\}$ 是基的假设相矛盾! 故 $|I| = 1$. 于是 M 中元均可写成基中元的倍数, 所以 M 是主理想. 即 R 是主理想整环.

5.1 设有 $\mathbb{Z}$ 模同态的短正合列:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & n & \longmapsto & f(n)=2n & & & & \\ & & & & n & \longmapsto & g(n)=\overline{n} & & \end{array}$$

试写出以下两个序列中出现的同态的定义, 并证明这两个序列在右边都不正合:

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})\xrightarrow{\overline{f}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})\xrightarrow{\overline{g}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)\to 0,$$

$$0\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\tilde{g}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)\xrightarrow{\tilde{f}}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)\to 0.$$

证明 $f: h\longmapsto fh$, $h\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$, 但由练习 2.8 的结果知 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$ 中只有零同态, 故 $\overline{f}$ 为恒等映射, $\overline{g}$ 为零同态. 由于 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$ 中有两个同态: 零同态和恒等映射, 故 $\overline{g}$ 不满.

$\tilde{g}: h\longmapsto hg$, $h\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_2)$, 故 $\tilde{g}(1_{\mathbb{Z}_2}) = g$, $\tilde{g}(0) = 0$. 所以 $\tilde{g}$ 是单射. 而 $\tilde{f}: h\longmapsto hf$, $h\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$, 从而 $\tilde{f}$ 是零同态. 但是 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2)$ 中除零同态外还有一个同态, 即 g, 所以 $\tilde{f}$ 不是满同态. 因此, 题中的两个序列在右边都不正合.

5.2 试证命题 5.3 的条件 (1) 与 (2) 的等价性.

证明 (1)$\Rightarrow$(2) 由命题 3.2 知 g 是分裂满同态, 即存在同态 $h: C\longrightarrow B$, 使 $gh = 1_C$. 由 h 诱导的同态 $\overline{h}: \mathrm{Hom}_R(M,C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_R(M,B)$ 满足 $\overline{g}\overline{h} = 1_{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,C)}$. 因此, 根据命题 3.2, (2) 的序列是分裂正合的.

(2)⇒(1) 取 $M=C$. 由 $\overline{g}$ 是满同态可知存在 $h\in \mathrm{Hom}_R(C,B)$, 使得 $gh=\overline{g}(h)=1_C$, 由命题 3.2 可得 (1) 成立.

5.3 证明例 5.1 中的 K 和 N 都不是自由 $\mathbb{Z}_6$ 模. 证明 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_3$ 不是投射 $\mathbb{Z}$ 模.

证明 由例 5.1 知 $K=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$, $N=\{\overline{0},\overline{3}\}$, 而 $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_6}(\overline{2})=\{\overline{0},\overline{3}\}$, $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}_6}(\overline{3})=\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$, 故 K, N 中均存在非零元, 其零化子不为零. 所以它们都不是自由 $\mathbb{Z}_6$ 模. 由于投射模是自由模的直和项, 故投射 $\mathbb{Z}$ 模中的非零元的零化子均为 0, 显然 $\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}_3$ 都不满足这一性质, 故它们不是投射 $\mathbb{Z}$ 模.

6.2 证明命题 6.2.

证明 若 $\prod_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ 是内射模. 对任意给定的 $\lambda\in\Lambda$, R 模的任意单同态 $f:A\longrightarrow B$ 以及 R 模同态 $h_\lambda:A\longrightarrow I_\lambda$, 对其它任意 $\lambda'\in\Lambda$, 任取一 $h_{\lambda'}:A\longrightarrow I_{\lambda'}$ (例如取 $h_{\lambda'}=0$), 则由直积的定义, 存在唯一的 R 模同态 $h:A\longrightarrow \prod_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$, 使下图交换:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "h_\lambda"] & \\
\prod\limits_{\mu} I_\mu \arrow[r, "\pi_\lambda"] & I_\lambda
\end{tikzcd}$$

由于 $\prod I_\mu$ 是内射的, 故存在同态 $\overline{h}:B\longrightarrow \prod I_\mu$, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[dl, "\overline{h}"] \\
 & \prod I_\mu &
\end{tikzcd}$$

令 $\overline{h}_\lambda=\pi_\lambda\overline{h}:B\longrightarrow I_\lambda$, 则 $\overline{h}_\lambda f=\pi_\lambda\overline{h}f=\pi_\lambda h=h_\lambda$. 从而对每个 $\lambda\in\Lambda$, I_λ 都是内射模.

反之, 若对每个 $\lambda\in\Lambda$, I_λ 都是内射模, 对任意单同态 $f:A\longrightarrow B$ 以及同态 $h:A\longrightarrow \prod I_\lambda$, 则 $\pi_\lambda h:A\longrightarrow I_\lambda$, 利用 I_λ 的内射性, 对每个 $\lambda\in\Lambda$, 存在 $\overline{h}_\lambda:B\longrightarrow I_\lambda$, 使得

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[ddl, "\exists\,\overline{h}_\lambda"] \\
 & \prod I_\lambda \arrow[d, "\pi_\lambda"'] & \\
 & I_\lambda &
\end{tikzcd}$$

交换. 又利用直积的性质, 存在同态 $\overline{h}:B\longrightarrow \prod I_\lambda$, 使得 $\pi_\lambda\overline{h}=\overline{h}_\lambda$. 由于对任意 $\lambda\in\Lambda$, $\pi_\lambda\overline{h}f=\overline{h}_\lambda f=\pi_\lambda h$, 从而由命题 3.3(1) 的同态唯一性, 有 $\overline{h}f=h$, 从而 $\prod I_\lambda$ 是内射模.

6.3 证明 $\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$ 模不是可除的.

证明 若取 $r=2\in\mathbb{Z}$, $y=1\in\mathbb{Z}$, 则不存在 $x\in\mathbb{Z}$, 使 $2x=1$. 故 $\mathbb{Z}$ 作为 $\mathbb{Z}$ 模不是可除的.

6.4 证明命题6.4.

证明 设D是可除R模, $\overline{D}=D/K$是其商模, 则对任意$\overline{y}\in\overline{D}$, $0\neq r\in R$, 存在$x\in D$, 使$rx=y$, 于是$\overline{y}=\overline{rx}=r\overline{x}$, 其中$\overline{x}\in\overline{D}$, 从而$\overline{D}$是可除的.

6.5 证明下列关于环R的条件都是等价的:

(a) R模都是投射模;

(b) R模的短正合列都是分裂正合的;

(c) R模都是内射模.

证明 (a) $\Longleftrightarrow$ (b) 若R模都是投射模. 设$0\to A\to B\to C\to 0$是R模的短正合列, 则由于C是投射模, 由定理5.6(1)与(4)的等价性, 上述正合列分裂. 对任意短正合列$0\to A\to B\to P\to 0$, 由假设它是分裂的, 故由同一命题, P是投射模.

(c) $\Longleftrightarrow$ (b) 设R模都是内射模, 若$0\to A\to B\to C\to 0$是任一短正合列. 由于A是内射模, 由定理6.1知它是分裂的. 反之, 若A是任一R模, 由于短正合列$0\to A\to B\to C\to 0$都分裂, 故由同一定理, A是内射模.

6.6 证明R模M是内射模当且仅当对R的每个理想S以及R模同态$h:S\longrightarrow M$, 存在一个$a\in M$使得对每个$s\in S$都有$h(s)=sa$.

证明 设R模同态$h:S\longrightarrow M$, 存在$a\in M$, 使$h(s)=sa$, 对每个$s\in S$, 则定义$\overline{h}:R\longrightarrow M$, $\overline{h}(r)=ra$. 显然$\overline{h}$是R模同态. 由于当$s\in S$时, $\overline{h}(s)=sa=h(s)$, 故$\overline{h}$是h的扩张, 从而由引理6.3知M是内射模.

7.1 (1) 对于任意Abel群A有$A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m\cong A/mA$, 这里假设$m>0$.

(2) 证明$\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_{(m,n)}$, 这里$(m,n)$表示$m$和$n$的最大公因子.

证明 (1) 定义映射$f':A\longrightarrow A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m$, $a\longmapsto a\otimes\overline{1}$, 则$f'$是$\mathbb{Z}$模同态, 且由于$a\otimes\overline{n}=na\otimes\overline{1}$, 故$f'$是满的. 由于

$$f'(ma)=ma\otimes\overline{1}=a\otimes m\overline{1}=a\otimes\overline{0}=0.$$

所以$mA\subseteq\operatorname{Ker}f'$, 从而$f'$诱导出同态$f:A/mA\longrightarrow A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m$. 另外, 定义$g:A\times\mathbb{Z}_m\longrightarrow A/mA$, $(a,\overline{n})\longmapsto na+mA$, 则$g$确是映射, 且是双线性的. 故存在同态(仍记为$g$) $A\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_m\longrightarrow A/mA$, $g(a\otimes\overline{n})=na+mA$. 由于$fg(a\otimes\overline{n})=f(na+mA)=na\otimes\overline{1}=a\otimes n$, $gf(a+mA)=g(a\otimes\overline{1})=a+mA$, 故$gf=1_{A/mA}$, $fg=1_{A\otimes\mathbb{Z}_m}$, 即$f$是同构.

(2) 据(1), $\mathbb{Z}_m\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_n\cong\mathbb{Z}_m/n\mathbb{Z}_m=\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z})/m\mathbb{Z}\cong\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}$. 而$n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z}=(m,n)\mathbb{Z}$, 故$\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z}+m\mathbb{Z})=\mathbb{Z}_{(m,n)}$.

7.2 设A'和B'分别是R模A与B的子模, 求证: $A/A'\otimes_R B/B'\cong(A\otimes_R B)/C$, 这里$C$是$A\otimes_R B$的子模, 由

$$\{a'\otimes b, a\otimes b'\mid a\in A, a'\in A', b\in B, b'\in B'\}$$

生成.

证明 考虑$f:(A/A',B/B')\longrightarrow(A\otimes B)/C$, $(\overline{a},\overline{b})\longmapsto a\otimes b+C$, 对任意$a'\in A'$, $b'\in B'$, $(a+a')\otimes(b+b')=a\otimes b+a'\otimes b+a\otimes b'+a'\otimes b'$, 而按$C$的定义, 后三项均属于$C$, 故$a\otimes b+C=(a+a')\otimes(b+b')+C$, 从而$f$是映射. 由于显然$f$是双线性的, 故存在唯一的$R$模同态$\phi:A/A'\otimes B/B'\longrightarrow(A\otimes B)/C$, 使$\phi(\overline{a}\otimes\overline{b})=a\otimes b+C$. 由$A$到$A/A'$, B到B/B'的自然同态可得同态$g:A\otimes B\longrightarrow A/A'\otimes B/B'$, 使$a\otimes b\longmapsto\overline{a}\otimes\overline{b}$. 任给$a'\in A'$, $b'\in B'$, 由于$g(a'\otimes b)=\overline{a'}\otimes\overline{b}=\overline{0}\otimes\overline{b}=0$, $g(a\otimes b')=\overline{a}\otimes\overline{b'}=0$, 从而$C$的生成元属于$g$的核. 所以, $C\subseteq\operatorname{Ker}g$, 从而得同态$\psi:(A\otimes B)?C\longrightarrow A/A'\otimes B/B'$, $\psi(a\otimes b+C)=\overline{a}\otimes\overline{b}$. 又由于$\psi\phi(\overline{a}\otimes\overline{b})=\psi(a\otimes b+C)=\overline{a}\otimes\overline{b}$, 得$\psi\phi=1$. 同理可得$\phi\psi=1$. 从而$A/A'\otimes B/B'\cong(A\otimes B)/C$.

7.3 作出 Abel 群的单同态 $f: \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4$, 并证明同态 $1 \otimes f: \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_4$ 是零同态.

证明 $f(\overline{0}) = \overline{\overline{0}} = 0 + (4)$, $f(\overline{1}) = \overline{\overline{2}} = 2 + (4)$, $(1 \otimes f)(\overline{n} \otimes \overline{m}) = \overline{n} \otimes \overline{\overline{2m}} = \overline{2n} \otimes \overline{\overline{m}} = \overline{0} \otimes \overline{\overline{m}} = 0$, 所以, $1 \otimes f = 0$.

7.4 (1) 设 $\mathfrak{a}$ 是环 R 的理想, B 是 R 模, 证明: $R/\mathfrak{a} \otimes_R B \cong B/\mathfrak{a}B$.

(2) 如果 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 都是 R 的理想, 则有 R 模同构: $R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{b} \cong R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.

证明 (1) 定义 ϕ: $B/\mathfrak{a}B \longrightarrow R/\mathfrak{a} \otimes B$, $\phi(\overline{\overline{b}}) = \overline{1} \otimes b$. $\forall r \in \mathfrak{a}, b' \in B$, 则 $\overline{1} \otimes (b + rb') = \overline{1} \otimes b + \overline{1} \otimes rb' = \overline{1} \otimes b + \overline{r} \otimes rb' = \overline{1} \otimes b + \overline{0} \otimes rb' = \overline{1} \otimes b$. 故 ϕ 是 R 同态. 定义 f: $(R/\mathfrak{a}, B) \longrightarrow B/\mathfrak{a}B$, $(\overline{a}, b) \longmapsto \overline{\overline{ab}}$. 若 $r \in \mathfrak{a}$, 则

$$\overline{\overline{(a+r)b}} = \overline{\overline{ab + rb}} = \overline{\overline{ab}} + \overline{\overline{rb}} = \overline{\overline{ab}},$$

从而 f 是双线性映射, 故 f 可唯一确定同态 ψ: $R/\mathfrak{a} \otimes B \longrightarrow B/\mathfrak{a}B$, 使 $\psi(\overline{a} \otimes b) = \overline{\overline{ab}}$. 由于

$$\phi\psi(\overline{a} \otimes b) = \phi(\overline{\overline{ab}}) = \overline{1} \otimes ab = \overline{a} \otimes b, \quad \psi\phi(\overline{\overline{b}}) = \psi(\overline{1} \otimes b) = \overline{\overline{b}},$$

故 $\phi\psi = 1_{R/\mathfrak{a} \otimes B}$, $\psi\phi = 1_{B/\mathfrak{a}B}$. 故 ϕ 是同构.

(2) 由练习 7.2, $R/\mathfrak{a} \otimes_R R/\mathfrak{b} \cong (R \otimes_R R)/C$, 其中 C 由 $\{a' \otimes b, a \otimes b' \mid a, b \in R, a' \in \mathfrak{a}, b' \in \mathfrak{b}\}$. 由于 $R \otimes_R R$ 自然同构于 R, 而在此同构下, C 同构于 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. 所以, 我们有 $R/\mathfrak{a} \otimes R/\mathfrak{b} \cong R/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.

(1)、 (2) 结论的特例为练习 7.1.

7.5 设 M_1, M_2 都是平坦 R 模, 证明 $M_1 \otimes_R M_2$ 也是平坦模.

证明 由命题 7.10, 只要证对任何 R 模的短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 以下序列正合: $0 \to (M_1 \otimes_R M_2) \otimes_R A \to (M_1 \otimes M_2) \otimes_R B \to (M_1 \otimes M_2)_R \otimes C \to 0$. 而由同一命题, 因 M_2 平坦, 所以, $0 \to M_2 \otimes A \to M_2 \otimes B \to M_2 \otimes C \to 0$ 正合, 又 M_1 平坦, 故 $0 \to M_1 \otimes (M_2 \otimes A) \to M_1 \otimes (M_2 \otimes B) \to M_1 \otimes (M_2 \otimes C) \to 0$ 正合. 而由命题 7.3, $M_1 \otimes (M_2 \otimes A) \cong (M_1 \otimes M_2) \otimes A$, $M_1 \otimes (M_2 \otimes B) \cong (M_1 \otimes M_2) \otimes B$, $M_1 \otimes (M_2 \otimes C) \cong (M_1 \otimes M_2) \otimes C$, 从而可得上述的序列正合.

7.6 设 M 是平坦 R 模, I 是内射 R 模, 证明 $\mathrm{Hom}_R(M, I)$ 是内射模.

证明 对任何 R 模短正合列 $0 \to A \to B \to C \to 0$, 由 M 是平坦模, 再注意到由命题 7.2(2) 和命题 7.10, 可得 $0 \to A \otimes M \to B \otimes M \to C \otimes M \to 0$ 正合. 因 I 是内射模, 从而由定理 6.1, $0 \to \mathrm{Hom}(C \otimes M, I) \to \mathrm{Hom}(B \otimes M, I) \to \mathrm{Hom}(A \otimes M, I) \to 0$ 正合, 又由命题 7.6, $0 \to \mathrm{Hom}(C, \mathrm{Hom}(M, I)) \to \mathrm{Hom}(B, \mathrm{Hom}(M, I)) \to \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(M, I)) \to 0$ 正合, 从而再由定理 6.1, $\mathrm{Hom}(M, I)$ 是内射模.

第二章　范畴

1.1 带基点的集合 (X, x) 是指一个集合 X 以及它的一个基点 $x \in X$. 如果我们以带基点的集合作为对象族, 定义态射 $f: (X, x) \longrightarrow (Y, y)$ 为满足 $f(x) = y$ 的集合的映射, 证明这是一个范畴.

证明 以 $\mathrm{ob}(\mathfrak{C})$ 记带点的集合组成的对象族. 设 (X, x), (Y, y), $(Z, z) \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C})$, $f \in \mathrm{hom}((Y, y), (Z, z))$, gf 为映射的合成, 则 $gf: X \longrightarrow Z$, 且 $(gf)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$. 所以 $gf \in \mathrm{hom}((X, x), (Z, z))$, 从而在 $\mathfrak{C}$ 上可定义态射的合成. 显然范畴公理 (C1) 成立. 而 $1_{(X,x)}(x) = x$, 故 $1_{(X,x)} \in \mathrm{hom}((X, x), (X, x))$. 由于态射的合成是映射的合成, 从而 (C2), (C3) 满足. 即 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴.

1.2 设 X 是一个拓扑空间, 如果我们以 X 中的所有开子集作为对象族, 对于 X 的开子集 U 和 V, 若 $V \not\subseteq U$, 则定义 $\mathrm{hom}(V, U) = \varnothing$, 若 $V \subseteq U$, 则令 $\mathrm{hom}(V, U)$ 只含一个元素, 即包含映射 $i_{UV}: V \hookrightarrow U$. 证明这是一个范畴, 记为 $\mathfrak{Open}(X)$.

证明 若 $U,V,W\in \mathrm{ob}(\mathfrak{Open}(X))$, $f\in \hom(U,V)$, $g\in \hom(V,W)$, 则 $f=i_{UV}$, $g=i_{VW}$, 故 $U\subseteq V$, $V\subseteq W$, 从而 $U\subseteq W$, 而 $gf=i_{VW}i_{UV}=i_{UW}\in \hom(U,W)$, 即可定义态射的合成. 范畴公理 (C1), (C2) 显然成立, 又由于 $1_U=i_{UU}\in\hom(U,U)$, 且 1_U 为恒等映射, 从而 (C3) 成立. 故 $\mathfrak{Open}(X)$ 是一个范畴.

1.3 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴, C 是其中一个取定的对象. 令 $\mathrm{ob}(\mathfrak{C}/C)=\bigcup_{A\in \mathrm{ob}(\mathfrak{C})}\hom(A,C)$, 即 $\mathfrak{C}/C$ 的对象是以 C 作为终点的态射. 对于 $f\in\hom(A,C)$, $g\in\hom(B,C)$ 定义

$$\hom(f,g)=\{h\in\hom(A,B)\mid f=gh\}.$$

当然我们必须作一点技术性处理使得当 $(f,g)\neq(f',g')$ 时有 $\hom(f,g)\cap\hom(f',g')=\varnothing$. 利用范畴 $\mathfrak{C}$ 中的态射的复合可以定义 $\mathfrak{C}/C$ 中态射的复合. 类似地, 单位态射 $1_f=1_A$. 验证这样定义的 $\mathfrak{C}/C$ 构成一个范畴, 称为 C 上 $\mathfrak{C}$ 对象的范畴.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

证明 任给 $f\in\hom(A,C)$, $g\in\hom(B,C)$, $h\in(D,C)$. 设 $k_1\in\hom(f,g)$, $k_2\in\hom(g,h)$. 则 $k_1\in\hom(A,B)$, $k_2\in\hom(B,D)$, 使 $f=gk_1$, $g=hk_2$, 从而 $k_2k_1\in\hom(A,D)$, 且 $h(k_2k_1)=(hk_2)k_1=gk_1=f$. 所以, $k_2k_1\in\hom(f,h)$, 即我们可用 $\mathfrak{C}$ 中态射的复合定义 $\mathfrak{C}/C$ 中态射的复合. 从而 (C1), (C2) 成立. 而若令 $1_f=1_A$, 则因 $f=f1_A$, 故 $1_f\in\hom(f,f)$. 显然 (C3) 成立. 所以, $\mathfrak{C}/C$ 是一个范畴.

1.4 设 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴, A_1,A_2 是 $\mathfrak{C}$ 中两个取定的对象. 令

$$\mathrm{ob}(\mathfrak{C}/\{A_1,A_2\})=\{(X,f_1,f_2)\mid X\in\mathrm{ob}(\mathfrak{C}), f_i\in\hom(X,A_i)\},$$
$$\hom_{\mathfrak{C}/\{A_1,A_2\}}((X,f_1,f_2),(Y,g_1,g_2))=\{h\in\hom_{\mathfrak{C}}(X,Y)\mid g_ih=f_i, i=1,2\}.$$

验证 $\mathfrak{C}/\{A_1,A_2\}$ 是一个范畴.

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[d, "h"] \arrow[dr, "f_2"] & \\
A_1 & Y \arrow[l, "g_1"'] \arrow[r, "g_2"] & A_2
\end{tikzcd}$$

证明 设 $h\in\hom(X,Y)$, 使 $g_ih=f_i$, $i=1,2$, $k\in\hom(Y,Z)$, 使 $e_ik=g_i$, $i=1,2$. 则 $kh\in\hom(X,Z)$, 且 $e_i(kh)=(e_ik)h=g_ih=f_i$, $i=1,2$. 所以, $kh\in\hom_{\mathfrak{C}/\{A_1,A_2\}}((X,f_1,f_2),(Z,e_1,e_2))$, 即用 $\mathfrak{C}$ 中态射的复合可定义 $\mathfrak{C}/\{A_1,A_2\}$ 中态射的复合.经技术处理后, (C1) 成立. 因意思复合为 $\mathfrak{C}$ 中复合, 故 (C2) 成立. 最后令 $1_{(X,f_1,f_2)}=1_X\in\hom((X,f_1,f_2),(X,f_1,f_2))$, 显然 (C3) 成立, 故 $\mathfrak{C}/\{A_1,A_2\}$ 是一个范畴.

1.5 设 G 是一个群, 令 $\mathrm{ob}(\mathfrak{C})=\{A\}$ 是一个单点集, $\hom(A,A)=G$. 验证 $\mathfrak{C}$ 是一个范畴. 其中每个态射都是同构. 问它的子范畴是什么? 满子范畴呢?

证明 由于 G 是群, 故 $\mathfrak{C}$ 的态射的复合可定义为 G 中的乘法, 显然 (C1) 成立. 而由群的乘法满足结合律得 (C2) 成立. 又取 1_A 为 G 中的单位元, 则 (C3) 成立. 所以, $\mathfrak{C}$ 是一个范畴. 显然每个态射 f 都是同构, 其逆为 f 在 G 中的逆元 f^{-1}. $\mathfrak{C}$ 的子范畴 $\mathfrak{D}$ 对应 G 的子群 H, 即取 $\hom_{\mathfrak{D}}(A,A)=H$. 而满子范畴即 $\mathfrak{C}$ 本身.

1.6 证明在群的范畴$\mathfrak{G}$里存在$\hom(\mathbb{Z},G)$与G之间的一一对应.

证明 对$\mathfrak{G}$中每个对象G, 定义$\phi:\hom(\mathbb{Z},G)\longrightarrow G$, $\phi(f)=f(1)$. 若$f,g\in\hom(\mathbb{Z},G)$使$\phi(f)=\phi(g)$, 那么, 对每个$n\in\mathbb{Z}$, 有$f(n)=f(1)^n=\phi(f)^n=\phi(g)^n=g(1)^n=g(n)$, 从而$\phi$是单射. 此外, 对每个$x\in G$, 定义$f:\mathbb{Z}\longrightarrow G$, 使$f(n)=x^n$, 则$f(n+m)=x^{n+m}=x^nx^m=f(n)f(m)$, $\forall n,m\in\mathbb{Z}$. 于是, $f\in\hom(\mathbb{Z},G)$, 且$\phi(f)=x$. 所以, ϕ是满射, 即$\hom(\mathbb{Z},G)$与G间有一一对应.

1.7 范畴$\mathfrak{C}$的生成子U是$\mathfrak{C}$的一个对象, 对于任意的$f,g\in\hom(A,B)$, $f\neq g$, 必存在$u\in\hom(U,A)$使得$fu\neq gu$. 证明群的范畴$\mathfrak{G}$有一个生成子.

证明 取$U=\mathbb{Z}\in\mathrm{ob}(\mathfrak{C})$, 则对任意的$f,g\in\hom_{\mathfrak{G}}(A,B)$, $f\neq g$, 那么必存在$x\in A$, 使$f(x)\neq g(x)$. 取$u:\mathbb{Z}\longrightarrow A$, $u(n)=x^n$, 则由练习 1.6 知, $u\in\hom(\mathbb{Z},A)$, 且$(fu)(1)=f(u(1))=f(x)$, $(gu)(1)=g(x)$, 即$(fu)(1)\neq(gu)(1)$. 所以, $fu\neq gu$. 从而$U=\mathbb{Z}$是$\mathfrak{G}$的一个生成子.

1.8 证明练习 1.1 里的带基点的集合的范畴具有生成子. 试找出例 1.1 到 1.9 的范畴中具有生成子的范畴.

证明 设$\mathfrak{C}$是带基点的集合的范畴. 设$(X,x)\in\mathrm{ob}(\mathfrak{C})$, 使得$|X|=2$, 则可证$(X,x)$是$\mathfrak{C}$的生成子: 对任意的$f,g\in\hom((Y,y),(Z,z))$, $f\neq g$, 则存在$y'\in Y$, 使$f(y')\neq g(y')$, 从而$y\neq y'$. 设$X=\{x,x'\}$, 定义映射$u:X\longrightarrow Y$为$u(x)=y$, $u(x')=y'$, 则$u\in\hom((X,x),(Y,y))$, 且由于$(fu)(x')=f(y')$, $(gu)(x')=g(y')$, 故$fu\neq gu$. 从而(X,x)是$\mathfrak{C}$的生成子.

在例 1.1 中, 单点集为生成子.

在例 1.3 中, $\mathbb{Z}$为生成子.

在例 1.7 中, F为生成子.

在例 1.8 中, R为生成子.

在例 1.9 中, 单点集为生成子.

2.1 设$F:\mathfrak{G}\longrightarrow\mathfrak{G}$是例 2.2 中定义的 Abel 化函子, 证明由$\tau_G:G\longrightarrow G/(G,G)$定义的$\tau:1_{\mathfrak{G}}\longrightarrow F$是自然变换.

证明 设$G,H\in\mathrm{ob}(\mathfrak{G})$, $f\in\hom_{\mathfrak{G}}(G,H)$, $x\in G$, 则$[F(f)\tau_G](x)=F(f)(x(G,G))=f(x)(H,H)$. 而$(\tau_Hf)(x)=\tau_Hf(x)=f(x)(H,H)$. 所以, $F(f)\tau_G=\tau_Hf$. 因此, $\tau:1_{\mathfrak{G}}\longrightarrow F$是自然变换.

2.2 设$U:\mathfrak{Ab}\longrightarrow\mathfrak{S}$是例 2.4 中定义的从 Abel 群范畴到集合范畴的忘却函子, $F:\mathfrak{S}\longrightarrow\mathfrak{Ab}$是例 2.3 定义的从集合范畴到 Abel 群范畴 (即$\mathbb{Z}$模范畴) 的自由函子. 试定义一个自然变换$\tau:FU\longrightarrow 1_{\mathfrak{Ab}}$并加以验证. 这里$FU$是函子$U$与$F$的复合.

证明 设$G\in\mathrm{ob}(\mathfrak{Ab})$. 若$x\in G$, 为区别起见, 我们记$U(G)$中相应的元为$\theta(x)$. 则$FU(G)$中的元具有一般形式$\sum_{x\in G}a_x\theta(x)$, 其中$\{\theta(x)\mid x\in G\}$是$FU(G)$看成$\mathbb{Z}$模的基, 且仅有有限多个$a_x$非零. 定义$\tau_G:FU(G)\longrightarrow G$为$\sum a_x\theta(x)\longmapsto\sum a_xx$. 则易证$\tau_G\in\hom(FU(G),G)$. 对任意的$f\in\hom_{\mathfrak{Ab}}(G,H)$, $\sum a_x\theta(x)\in FU(G)$, 则

$$(f\tau_G)(\sum a_x\theta(x))=f(\sum a_xx)=\sum a_xf(x),$$

$$(\tau_HFU(f))(\sum a_x\theta(x))=\tau_H(\sum a_x\theta(f(x))=\sum a_xf(x).$$

所以, $f\tau_G=\tau_HFU(f)$, 即$\tau=\{\tau_G\mid G\in\mathrm{ob}(\mathfrak{Ab})\}$: $FU\longrightarrow 1_{\mathfrak{Ab}}$是自然变换.

2.3 设$\mathfrak{B},\mathfrak{C},\mathfrak{D},\mathfrak{E}$是四个范畴, $F,G:\mathfrak{C}\longrightarrow\mathfrak{D}$, $K:\mathfrak{B}\longrightarrow\mathfrak{C}$, $H:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{E}$都是函子. 设$\tau:F\longrightarrow G$是自然变换, 证明$\{H\tau_A\mid A\in\mathrm{ob}(\mathfrak{C})\}$是$HF$到$HG$的自然变换; $\{\tau_{K(B)}\mid B\in\mathrm{ob}(\mathfrak{B})\}$是$FK$到$GK$的自然变换.

证明 由于τ是F到G的自然变换, 所以对任意的$f\in\hom_{\mathfrak{C}}(A,A')$, 有$G(f)\tau_A=\tau_{A'}F(f)$. 又由于$H:\mathfrak{D}\longrightarrow\mathfrak{E}$是函子, 故有

$$HG(f)\cdot H\tau_A=H(G(f)\tau_A)=H(\tau_{A'}F(f))=H\tau_{A'}\cdot HF(f).\tag{1}$$

从而 $\{H\tau_A \mid A \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C})\}$ 是 HF 到 HG 的自然变换. 在上式 (1) 中取 $A = K(B)$, $A' = K(B')$, $B, B' \in \mathrm{ob}(\mathfrak{B})$, 任取 $g \in \hom_{\mathfrak{B}}(B, B')$, 令 $f = K(g) \in \hom(A, A')$, 则有

$$GK(g) \cdot \tau_{K(B)} = \tau_{K(B')} \cdot FK(g).$$

从而 $\{\tau_{K(B)} \mid B \in \mathrm{ob}(\mathfrak{B})\}$ 是 FK 到 GK 的自然变换.

2.4 设范畴 $\mathfrak{V}$ 的对象是复数域 $\mathbb{C}$ 上有限维向量空间, 其态射为向量空间的同构映射. 试证明下列结论:

(1) 如果 $f : V \longrightarrow U$ 是 $\mathfrak{V}$ 的态射 (即向量空间的同构), 那么它的对偶映射 $\overline{f} : U^* \longrightarrow V^*$ 也是 $\mathfrak{V}$ 的态射. 这里 $[\overline{f}(u^*)](v) = u^*[f(v)]$.

(2) 令 $D(V) = V^*$, $D(f) = \overline{f}^{-1}$, 则 $D : \mathfrak{V} \longrightarrow \mathfrak{V}$ 是一个共变函子.

(3) 选取 V 的基 $\{x_1, \cdots, x_n\}$, 并取 V^* 的对偶基 $\{f_1, \cdots, f_n\}$ (即满足 $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ 的基). 则令 $\alpha_V(x_i) = f_i$ 可以诱导向量空间的同构 $\alpha_V : V \longrightarrow V^*$. 因此有 $\alpha_V : V \xrightarrow{\sim} D(V)$.

(4) 举出一个 $\dim V = 1$ 的反例说明 $\alpha = \{\alpha_V\}$ 所定义的同构 $\alpha : 1_{\mathfrak{V}} \longrightarrow D$ 不是自然的.

证明 (1) 首先对任意的 $v, v_1, v_2 \in V$, $k \in \mathbb{C}$, 有

$$\begin{aligned}[\overline{f}(u^*)](v_1 + v_2) &= u^*[f(v_1 + v_2)] = u^*[f(v_1) + f(v_2)] \\ &= u^*[f(v_1)] + u^*[f(v_2)] = [\overline{f}(u^*)](v_1) + [\overline{f}(u^*)](v_2).\end{aligned}$$

$$[\overline{f}(u^*)](kv) = u^*[f(kv)] = u^*[kf(v)] = ku^*[f(v)] = k[\overline{f}(u^*)](v)$$

所以, $\overline{f}(u^*) \in V^*$, 即 $\overline{f}$ 是一映射.

其次, 任取 $u_1^*, u_2^* \in U^*$, 有

$[\overline{f}(u_1^*+u_2^*)](v) = (u_1^*+u_2^*)[f(v)] = u_1^*[f(v)]+u_2^*[f(v)][\overline{f}(u_1^*)](v)+[\overline{f}(u_2^*)](v) = [\overline{f}(u_1^*)+\overline{f}(u_2^*)](v)$, 即, $\overline{f}(u_1^* + u_2^*) = \overline{f}(u_1^*) + \overline{f}(u_2^*)$. 同理可证, $\overline{f}(ku^*) = k\overline{f}(u^*)$. 故 $\overline{f}$ 是一个线性映射.

若 $\overline{f}(u^*) = 0$, 则 $u^*[f(V)] = [\overline{f}(u^*)](V) = 0$. 又 f 是向量空间同构, 故 $f(V) = U$, 从而 $u^* = 0$. 即 $\overline{f}$ 是单射. 而由 $\dim V = \dim U$ 得: $\dim V^* = \dim U^*$. 于是 $\overline{f}$ 是满射, 从而是态射.

(2) 设 $f \in \hom(V, U)$, $g \in \hom(U, W)$, $w^* \in W^*$, $v \in V$, 则

$$[\overline{gf}(w^*)](v) = w^*(gf)(v) = w^*g[f(v)] = [\overline{g}(w^*)](f(v)) = [\overline{f}(\overline{g}(w^*))](v) = [(\overline{f}\overline{g})(w^*)](v),$$

即, $\overline{gf} = \overline{f}\overline{g}$. 从而, $\overline{gf}^{-1} = (\overline{f}\overline{g})^{-1} = \overline{g}^{-1}\overline{f}^{-1}$. 所以, $D(gf) = D(g)D(f)$. 由于 $\overline{1_V} = 1_{V^*}$, 所以, $D(1_V) = \overline{1_V}^{-1} = 1_{V^*}^{-1} = 1_{V^*} = 1_{D(V)}$. 因此, D 是 $\mathfrak{V}$ 到 $\mathfrak{V}$ 的共变函子.

(3) 这是显然的. 因为若令 $\alpha_V(x_i) = f_i$, 则 α_V 可诱导 $V \longrightarrow V^*$ 的线性变换: $\alpha_V(\sum_{i=1}^n a_i x_i) = \sum_{i=1}^n a_i f_i$. 而由于 α_V 把 V 的基映到 V^* 的基, 从而 α_V 是同构.

(4) 取 V 为由 x 为基的 1 维向量空间, e 为其对偶基, $f : V \longrightarrow V$ 为 V 的自同构, 使 $f(x) = 2x$. 则 $[D(f)\alpha_V](x) = D(f)(e) = \overline{f}^{-1}(e)$. 而 $[\overline{f}^{-1}(e)](x) = [\overline{f^{-1}}(e)](x) = e(f^{-1}(x)) = e(\frac{1}{2}x) = \frac{1}{2}$. 所以, $\overline{f}^{-1}(e) = \frac{1}{2}e$. 另外, $(\alpha_V f)(x) = \alpha_V(f(x)) = \alpha_V(2x) = 2e$, 所以, $D(f)\alpha_V \neq \alpha_V f$. 从而 α 不是自然的.

3.1 验证例 3.2 中构造的集合范畴 $\mathfrak{S}$ 的积与余积.

证明 设 $\{S_i \mid i \in I\}$ 是一族集合, $P = \{\alpha : I \longrightarrow \cup S_i \mid \alpha(i) \in S_i\}$, $\pi_i : P \longrightarrow S_i$ 为 $\pi_i(\alpha) = \alpha(i)$. 则若有二元组 $(B, \{\phi_i\})$, 其中 $\phi_i : B \longrightarrow S_i$ 是映射, 则定义 $\phi : B \longrightarrow P$ 为 $\phi(b)(i) = \phi_i(b)$, $\forall i \in I$. 则 $\phi(b)$ 为从 I 到 $\cup S_i$ 的映射, 且 $\phi(b)(i) \in S_i$. 此外, 由于 $(\pi_i\phi)(b) = \pi_i\phi(b) = \phi(b)(i) = \phi_i(b)$, 故 $\pi_i\phi = \phi_i$ 对所有 $i \in I$ 成立. 若另有 $\psi : B \longrightarrow P$, 使 $\pi_i\psi = \phi_i$, $\forall i \in I$, 那么 $\psi(b)(i) = \pi_i\psi(b) = \phi_i(b) = \phi(b)(i)$, 即 $\psi = \phi$. 所以, $\psi = \phi$. 于是, $(P, \{\pi_i\})$ 是 $\{S_i\}$ 的积.

设 $S = \{(i, x) \mid i \in I, x \in S_i\}$ 为 S_i 的不交并. $\iota_i : S_i \longrightarrow S$ 为 $\iota_i(x) = (i, x)$, 则对任一二元组 $(B, \{\psi_i\})$, 其中 B 是集合, $\psi_i : S_i \longrightarrow B$. 定义 $\psi : S \longrightarrow B$ 为 $\psi(i, x) = \psi_i(x)$. 则

对每个 $x \in S_i$, $(\psi\iota_i)(x) = \psi(i,x) = \psi_i(x)$. 于是 $\psi\iota_i = \psi_i$. 设 $\phi : S \longrightarrow B$ 使 $\phi\iota_i = \psi_i$, 则 $\phi(i,x) = (\phi\iota_i)(x) = \psi_i(x) = \psi(i,x), \forall\, i \in I,\, x \in S_i$. 于是, $\phi = \psi$, 即 $(S, \{\iota_i\})$ 为 $\{S_i\}$ 的余积.

3.2 证明在群的范畴 $\mathfrak{G}$ 里, 加群 $\mathbb{Z}$ 是单元集 $X = \{1\}$ 上的自由对象. 并证明有理数加群 $\mathbb{Q}$ 不可能是自由对象.

证明 设 $i : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ 为 $i(1) = 1$, A 是任一群, $f : X \longrightarrow A$ 是一映射, $f(1) = a$, 则存在映射 $\overline{f} : \mathbb{Z} \longrightarrow A$, 使 $\overline{f}(n) = a^n$. 则易证 $\overline{f}i = f$, 并且 $\overline{f}$ 是群同态. 设 $g : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ 是一群同态, 且使 $gi = f$, 则 $g(1) = a$, 从而 $g(n) = a^n$, 故 $g = \overline{f}$. 所以, $\mathbb{Z}$ 是 X 上的自由对象.

假设 $\mathbb{Q}$ 是 X 上的自由对象. $i : X \longrightarrow \mathbb{Q}$ 是相应的映射. 取群 $\mathbb{Z}$ 及映射 $f : X \longrightarrow \mathbb{Z}$, 使 $f(X) = \{1\}$. 则按定义, 存在群同态 $\overline{f} : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}$, 使 $\overline{f}i = f$. 从而 $\overline{f}$ 不是零同态. 但是由练习 2.8 知, $\mathbb{Q}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的同态只有零同态. 从而矛盾! 故 $\mathbb{Q}$ 不是自由对象.

3.3 试证明命题 3.3.

证明 设 $i : X \longrightarrow F$, $i' : X' \longrightarrow F'$ 分别为定义自由对象 F 和 F' 的映射. 由于 $|X| = |X'|$, 故存在映射 $\phi : X \longrightarrow X'$ 以及 $\psi : X' \longrightarrow X$, 使得 $\psi\phi = 1_X$, $\phi\psi = 1_{X'}$. 由于 F 是 X 上的自由对象, 故对映射 $i'\phi : X \longrightarrow F'$, 存在唯一的态射 $\overline{f} : F \longrightarrow F'$, 使 $\overline{f}i = i'\phi$. 同样, 由于 F' 是 X' 上的自由对象, 故对映射 $i\psi : X' \longrightarrow F$ 存在唯一的态射 $\overline{g} : F' \longrightarrow F$, 使 $\overline{g}i' = i\psi$. 对第一式两端右边分别乘以 $\overline{g}$, 得: $\overline{g}\overline{f}i = \overline{g}i'\phi = i\psi\phi = i$. 又由于 $1_F i = i$, 由唯一性得: $\overline{g}\overline{f} = 1_F$. 同理可得 $\overline{f}\overline{g} = 1_{F'}$. 所以, 对象 F 和 F' 是同构的.

3.4 设有范畴 $\mathfrak{C}$ 以及其中的两个对象 A_1, A_2. 试定义一个范畴 $\mathfrak{D}$, 使得 $\mathfrak{D}$ 中的泛对象就是 A_1, A_2 在 $\mathfrak{C}$ 中的余积.

证明 令 $\mathrm{ob}(\mathfrak{D}) = \{(X, f_1, f_2) \mid X \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C}), f_i \in \hom(A_i, X)\}$,
$\hom_{\mathfrak{D}}((X, f_1, f_2), (Y, g_1, g_2)) = \{h \in_{\mathfrak{C}} (X, Y) \mid hf_i = g_i, i = 1, 2\}$.

那么, $\mathfrak{D}$ 是一个范畴: 适当技术处理, 可使 (C1) 成立. 定义态射的合成为 $\mathfrak{C}$ 中的态射合成, 故 (C2) 成立. 对任意 $A = (X, f_1, f_2) \in \mathrm{ob}(\mathfrak{D})$, 取 $1_A = 1_X$, 则易证 1_A 满足 (C3). 根据余积的定义可知, $\mathfrak{D}$ 中的泛对象就是 A_1, A_2 在 $\mathfrak{C}$ 中的余积.

3.5 模仿例 3.8 用三种方式定义范畴 $\mathfrak{C}$ 里态射对的推出.

解答 (定义一) 设在 $\mathfrak{C}$ 内有两个态射 $\psi_1 : C \longrightarrow A_1$ 和 $\psi_2 : C \longrightarrow A_2$. 令

$$\mathrm{ob}(\mathfrak{D}) = \{(X, f_1, f_2) \mid X \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C}), f_i \in \hom(A_i, X), i = 1, 2, f_1\psi_1 = f_2\psi_2\}.$$

$$\hom_{\mathfrak{D}}((X, f_1, f_2), (Y, g_1, g_2)) = \{h \in \hom(X, Y) \mid hf_i = g_i, i = 1, 2\}.$$

易证 $\mathfrak{D}$ 是个范畴, $\mathfrak{D}$ 中的泛对象 (Z, q_1, q_2) 称为 $\mathfrak{C}$ 中态射对 (ψ_1, ψ_2) 的推出.

(定义二) 对于 $\mathfrak{C}$ 中任意的对象 X 以及满足 $f_1\psi_1 = f_2\psi_2$ 的态射 $f_i \in \hom(A_i, X)$, 必存在唯一的态射 $h : Z \longrightarrow X$, 使得 $hq_i = f_i$, 则称 (Z, q_1, q_2) 为 $\mathfrak{C}$ 中的一个推出.

(定义三) 令 $\mathrm{ob}(\mathfrak{D}) = \bigcup_{A \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C})} \hom(C, A)$. 对 $\mathfrak{C}$ 中态射 $f : C \longrightarrow A$ 及 $g : C \longrightarrow B$, 定义 $\hom(f, g) = \{h \in \hom(A, B) \mid hf = g\}$. 用 $\mathfrak{C}$ 中态射合成定义 $\mathfrak{D}$ 中态射合成, 可证 $\mathfrak{D}$ 是一个范畴. 将 ψ_i 看成 $\mathfrak{D}$ 中的对象, 则 ψ_1 与 ψ_2 在 $\mathfrak{D}$ 中的余积就称为 (ψ_1, ψ_2) 在 $\mathfrak{C}$ 中的推出.

4.1 如果在范畴 $\mathfrak{C}$ 里取定了两个对象 $A_1 \cdot A_2$, 试定义一个共变函子 $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{S}$ 使得 F 可用对象 $A_1 \oplus A_2$ 表示.

解答 定义函子 $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{S}$ 如下: 对 $B \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C})$, $F(B) = \hom_{\mathfrak{C}}(A_1, B) \prod \hom_{\mathfrak{C}}(A_2, B) = \{(f_1, f_2) \mid f_i \in \hom_{\mathfrak{C}}(A_i, B), i = 1, 2\}$ (见例 3.2). $F : \hom_{\mathfrak{C}}(B, C) \longrightarrow \hom_{\mathfrak{S}}(F(B), F(C))$, $h \longmapsto F(h) : (f_1, f_2) \mapsto (hf_1, hf_2)$. 则易证 F 是函子. 设 $(A_1 \coprod A_2, \iota_1, \iota_2)$ 是 A_1, A_2 的余积, 其中

$\iota_i : A_i \longrightarrow A_1 \coprod A_2$, $i=1,2$. 定义 $\alpha_B : \hom(A_1 \coprod A_2, B) \longrightarrow F(B)$, $\alpha_B(f) = (f\iota_1, f\iota_2)$. 则由余积的定义知道 α_B 是双射, 且 $\alpha = \{\alpha_B\}$ 是 $\hom_{\mathfrak{C}}(A_1 \coprod A_2, -)$ 到 F 的自然同构, 故 F 可由 $A_1 \coprod A_2$ 表示.

4.2 证明从 R 模范畴 $\mathfrak{M}_R$ 到集合范畴 $\mathfrak{S}$ 的忘却函子 (参见例 2.4) 以及从群的范畴 $\mathfrak{G}$ 到集合范畴 $\mathfrak{S}$ 的忘却函子都是可表函子.

证明 设 $F : \mathfrak{M}_R \longrightarrow \mathfrak{S}$ 是忘却函子, 则可证 F 可由对象 R 表示. 任给 $B \in \mathrm{ob}(\mathfrak{M}_R)$, 定义

$$\alpha_B : \mathrm{Hom}_R(R, B) \longrightarrow F(B), \quad h \longmapsto h(1).$$

则由第一章练习 2.6 知 α_B 是 R 模同构 (从而是双射). 易证 $\alpha = \{\alpha_B\}$ 是 $\hom_{\mathfrak{M}_R}(R, -) \longrightarrow F$ 的自然同构, 故 F 可由 R 表示.

设 $F : \mathfrak{G} \longrightarrow \mathfrak{S}$ 是忘却函子, 则可证 F 可由对象 $\mathbb{Z}$ 表示. 任给 $B \in \mathrm{ob}(\mathfrak{G})$, 定义

$$\alpha_B : \hom_{\mathfrak{G}}(\mathbb{Z}, B) \longrightarrow F(B), \quad h \longmapsto h(1).$$

则由练习 1.6 可知 α_B 是双射. 易证 $\alpha = \{\alpha_B\}$ 是 $\hom_{\mathfrak{G}}(\mathbb{Z}, -) \longrightarrow F$ 的自然同构. 故 F 可由 $\mathbb{Z}$ 表示.

4.3 设 $\mathfrak{M}_R$ 是 R 模的范畴, $\mathfrak{S}$ 是集合的范畴. $G : \mathfrak{M}_R \longrightarrow \mathfrak{S}$ 是忘却函子 (参见例 2.4), 验证 G 的左伴随函子 $F : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{M}_R$ 就是把一个集合 X 映到以 X 为基的自由模的函子.

证明 设 $C, C' \in \mathrm{ob}(\mathfrak{S})$, $D, D' \in \mathrm{ob}(\mathfrak{M}_R)$, $i : C \longrightarrow F(C)$ 为定义自由模的映射. 若 $h : C \longrightarrow D$ 是映射, 则 $\exists |\ \overline{h} : F(C) \longrightarrow D$ 是 R 模同态, 使 $\overline{h}i = h$. 定义

$$\alpha_{C,D} : \hom_{\mathfrak{S}}(C, G(D)) \longrightarrow \hom_{\mathfrak{M}_R}(F(C), D), \quad h \longmapsto \overline{h}.$$

则从自由模的定义知 $\alpha_{C,D}$ 是双射. 对每对态射 $f \in \hom(C', C)$ 及 $g \in \hom(D, D')$, 要证下图交换

$$\begin{CD}
\hom_{\mathfrak{S}}(C, G(D)) @>{\alpha_{C,D}}>> \hom_{\mathfrak{M}_R}(F(C), D) \\
@V{\hom_{\mathfrak{S}}(f, G(g))}VV @VV{\hom_{\mathfrak{M}_R}(F(f), g)}V \\
\hom_{\mathfrak{S}}(C', G(D')) @>{\alpha_{C',D'}}>> \hom_{\mathfrak{M}_R}(F(C'), D')
\end{CD}$$

即要证对任意态射 $h : C \longrightarrow G(D)$, $g\overline{h}F(f) = \overline{G(g)hf}$. 由于 G 是忘却函子, 故 $G(g) = g$. 设 $i' : C' \longrightarrow F(C')$ 是自由模 $F(C')$ 的定义态射, 则 $F(f)i' = if$. 而

$$(g\overline{h}F(f)) \cdot i' = (g\overline{h})(F(f)i') = (g\overline{h})(if) = g(\overline{h}i)f = ghf = G(g)hf.$$

因此, 由 $F(C')$ 的定义, $g\overline{h}F(g) = \overline{G(g)hf}$, 即 G 的左伴随函子为 F.

4.4 设 X 是一个取定的集合, $\mathfrak{S}$ 是集合的范畴. $h_X = \hom_{\mathfrak{S}}(X, -) : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ 是共变 hom 函子. 证明定义为 $Y \mapsto X \times Y$ 的函子 $F : \mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}$ 是函子 h_X 的左伴随函子.

证明 定义 $\alpha_{C,D} : \hom(C, \hom(X, D) \longrightarrow \hom(X \times C, D)$, $h \longmapsto \alpha_{C,D}(h) : (x, c) \longmapsto h(c)(x)$.

定义 $\beta : \hom(X \times C, D) \longrightarrow \hom(C, \hom(X, D))$, $k \longmapsto \beta(k) : (\beta(k)(c))(x) = k(x, c)$. 则 $[(\beta\alpha_{C,D}(h))(c)](x) = \alpha_{C,D}(h)(x, c) = h(c)(x)$, $\forall\, c \in C$, $x \in X$. 从而 $(\beta\alpha_{C,D}(h))(c) = h(c)$, $\forall\, c \in C$. 故 $\beta\alpha_{C,D}(h) = h$, $\forall\, h$. 所以, $\beta\alpha_{C,D} = 1$.

$[\alpha_{C,D}\beta(k)](x, c) = (\beta(k)(c))(x) = k(x, c)$, $\forall\, (x, c) \in X \times C$. 所以, $\alpha_{C,D}\beta(k) = k$, $\forall\, k$. 因此 $\alpha_{C,D}\beta = 1$. 即 $\alpha_{C,D}$ 为双射.

对每对态射 $f \in \hom(C', C)$ 及 $g \in \hom(D, D')$. 要证下图交换

$$\begin{tikzcd}
\hom(C,\hom(X,D)) \arrow[r, "\alpha_{C,D}"] \arrow[d, "{\hom(f,h_X(g))}"'] & \hom(X\times C,D) \arrow[d, "{\hom(F(f),g)}"] \\
\hom(C',\hom(X,D')) \arrow[r, "\alpha_{C',D'}"] & \hom(X\times C',D')
\end{tikzcd}$$

即要证: 对任意态射 $h:C\longrightarrow \hom(X,D)$, $g\alpha_{C,D}(h)F(f)=\alpha_{C',D'}(h_x(g)hf)$ 成立. 任给 $(x,c')\in X\times C'$,

$$\begin{aligned}
[g\alpha_{C',D'}(h)F(f)](x,c') &= [g\alpha_{C',D'}(h)](x,f(c'))=g[(h(f(c')))(x)]=[\alpha_{C',D'}(h_X(g)hf)](x,c')\\
&=[(h_X(g)hf)(c')](x)=g[(h(f(c')))(x)]
\end{aligned}$$

于是, $g\alpha_{C,D}(h)F(f)=\alpha_{C',D'}(h_x(g)hf)$. 即 F 是 h_X 的左伴随函子.

5.1 证明集合范畴 $\mathfrak{S}$ 里的单态射和满态射就是单映射和满映射.

证明 设 $f:B\longrightarrow C$ 是集合的映射, 若 f 不是单映射, 则存在 $b,b'\in B$, $b\neq b'$, 但 $f(b)=f(b')$. 令 $A=\{a\}$ 为单元集, 定义映射 $g:A\longrightarrow B$ 为 $g(a)=b$, $h:A\longrightarrow B$ 为 $h(a)=b'$, 则 $fg=fh$, 但 $g\neq h$, 故 f 不是单态射. 从而单态射为单映射. 若 f 不是满映射, 则存在 $c\in C$, 使 c 不是 f 的象. 取 $D=\{d_1,d_2\}$ 为两个元的集合. 定义 $u:C\longrightarrow D$ 为 $u(C)=\{d_1\}$, $v:C\longrightarrow D$ 为 $v(x)=d_1$, 若 $x\neq c$, 而 $v(c)=d_2$. 则 $uf=vf$, D但 $u\neq v$, 故 f 不是满态射. 从而满态射为满映射. 另一方面, 单映射显然是单态射, 满映射显然是满态射.

5.2 证明包含同态 $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Q}$ 是含幺环的范畴里的满态射, 但 f 显然不是满同态.

证明 设 R 是任一含幺环, u,v 为 $\mathbb{Q}\longrightarrow R$ 的态射. 若 $uf=vf$, 则由 $u(n)=v(n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ 且 $u(1)=v(1)=1$ 得

$$n\cdot u\left(\frac{1}{n}\right)=u\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n=n\cdot v\left(\frac{1}{n}\right)=v\left(\frac{1}{n}\right)\cdot n=1,\quad \forall 0\neq n\in\mathbb{Z}.$$

由于在 R 中 n 关于乘法的逆元若存在则唯一, 所以 $u(\frac{1}{n})=v(\frac{1}{n})$. 从而 $u(\frac{m}{n})=m\cdot u(\frac{1}{n})=m\cdot v(\frac{1}{n})=v(\frac{m}{n})$. 故 $v=u$. 从而 f 是满态射, 但 f 不是满同态.

5.3 证明自然同态 $\nu:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ 是可除 Abel 群范畴里的单态射, 但 ν 不是群的单同态.

证明 设 $g,h:A\longrightarrow\mathbb{Q}$ 是可除 Abel 群范畴的态射, 使 $\nu g=\nu h$. 则对任何 $x\in A$, $g(x)-h(x)\in\mathbb{Z}$. 若 $g\neq h$, 则存在 $x\in A$, 使 $g(x)=h(x)+n$, 且 $n\neq 0$. 对这样的 x 和 n, 由于 A 是可除的, 故存在 $y\in A$, 使 $x=ny$. 从而 $g(y)=h(y)+1$. 又对这样的 y, 存在 $z\in A$, 使 $3z=y$. 故 $g(3z)=h(3z)+1$. 所以, $3(g(z)-h(z))=1$. 而 $g(z)-h(z)\in\mathbb{Z}$, 故得 $3\mid 1$, 矛盾! 即 $g=h$. 所以, ν 是单态射, 但 nu 不是单同态.

5.4 证明命题 5.1.

证明 设 $u,v:E\longrightarrow A$, $p,q:C\longrightarrow D$ 是 $\mathfrak{C}$ 中任意态射.

(1) 若 $(gf)u=(gf)v$, 则 $g(fu)=g(fv)$. 由于 g 是单态射, 所以 $fu=fv$. 又由于 f 也是单态射, 故 $u=v$, 即 gf 是单态射.

(2) 若 $fu=fv$, 则 $g(fu)=g(fv)$, 所以 $(gf)u=(gf)v$. 由于 gf 是单态射, 因此得 $u=v$, 即 f 是单态射.

(3) 若 $p(gf)=q(gf)$, 那么 $(pg)f=(qg)f$. 由于 f 是满态射, 故 $pg=qg$. 又因为 g 也是满态射, 所以 $p=q$, 即 gf 是满态射.

(4) 若 $pg=qg$, 则 $(pg)f=(qg)f$, 从而 $p(gf)=q(gf)$. 又因为 gf 是满态射, 所以 $p=q$, 即 g 是满态射.

(5) 若 f 是同构, 则存在 $\mathfrak{C}$ 中态射 $h: B \longrightarrow A$, 使 $fh=1_B$, $hf=1_A$. 由于 1_A 是单态射, 故由 (2), f 是单态射. 又因 1_B 是满态射, 故由 (4), f 是满态射.

5.5 证明态射 $0 \longrightarrow A$ 是单态射, $A \longrightarrow 0$ 是满态射.

证明 设 $f: 0 \longrightarrow A$ 是态射, 则对任意两个态射 $u, v: K \longrightarrow A$, 且满足 $fu=fv$, 由于 0 是零对象, 根据定义, K 对 0 的态射是唯一的, 所以, $u=v$, 即, f 是单态射.

同样, 设 $g: A \longrightarrow 0$ 是态射, 则对任意两个态射 $u, v: 0 \longrightarrow B$, 满足 $ug=vg$, 则根据零对象的定义, 0 到任意一个对象的态射是唯一的, 所以, $u=v$, 即: g 是满态射.

5.6 证明态射对 $f, g: B \longrightarrow C$ 的差核是单态射, 差余核是满态射.

证明 设 $i: K \longrightarrow B$ 是态射对 (f,g) 的差核. 若对任意的态射 $h_1, h_2: A \longrightarrow K$, 满足 $ih_1=ih_2=h$, 则 h 是 $A \longrightarrow K$ 的态射. 由于 $fi=gi$, 所以

$$fh=f(ih_1)=(fi)h_1=(gi)h_1=g(ih_1)=gh.$$

因此由差核的定义知, 满足 $i\overline{h}=h$ 的 $\overline{h}$ 是唯一的, 而 $ih_1=ih_2=h$, 故 $h_1=h_2$, 即 i 是单态射

设 $j: C \longrightarrow D$ 是态射对 (f,g) 的差余核. 若对任意的态射 $h_1, h_2: D \longrightarrow E$, 满足 $h_1 j = h_2 j = h$, 则 h 是 $C \longrightarrow E$ 的态射. 由于 $jf=jg$, 所以

$$hf=(h_1 j)f=h_1(jf)=h_1(jg)=(h_1 j)g=hg.$$

因此由差余核的定义知, 满足 $\overline{h}j=h$ 的态射 $\overline{h}$ 是唯一的, 从而得 $h_1=h_2$, 即 j 是满态射.

5.7 构造适当的范畴以证明态射对的差核与差余核分别是余泛对象及泛对象.

证明 设 $f, g \in \hom_{\mathfrak{C}}(C, D)$ 是范畴 $\mathfrak{C}$ 的两个态射. 令

$$\mathrm{ob}(\mathfrak{D})=\{(A,i) \mid A \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C}), i \in \hom(A,C),\ 使\ fi=gi\}.$$

$$\hom_{\mathfrak{D}}((A,i),(B,i'))=\{h \in \hom(A,B) \mid i'h=i\}.$$

态射的复合为 $\mathfrak{C}$ 中的复合, 则易证 $\mathfrak{D}$ 是一个范畴. 若 $\mathfrak{D}$ 中有余泛对象 (K,i), 则 $i: K \longrightarrow C$ 即为 (f,g) 的差核.

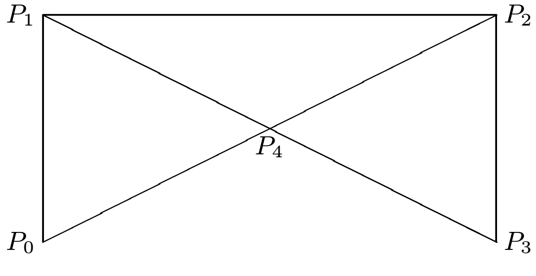
若令 $\mathrm{ob}(\mathfrak{E})=\{(A,j) \mid A \in \mathrm{ob}(\mathfrak{C}), j \in \hom(C,A),\ 使\ jf=jg\}$.

$$\hom_{\mathfrak{E}}((A,j),(B,j'))=\{h \in \hom(A,B) \mid hj=j'\}.$$

态射的复合为 $\mathfrak{C}$ 中的复合, 则易证 $\mathfrak{E}$ 是一个范畴. 若 $\mathfrak{E}$ 中有泛对象 (A,j), 则 $j: C \longrightarrow A$ 即为 (f,g) 的差余核.

第三章　同调代数

1.2 试计算下面的线条图形所对应的单纯复形 K 的同调群.



解答 $H_1(K) \cong R^3$, $H_0(K) \cong R$, 其余 $H_n(K) = 0$.

1.5 设 M 是 R 模, 如果对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 令 $C_n = M$, $d_n = 0$. 证明 $\mathcal{C} = (C_n, d_n)$ 是一个复形, 并求它的同调模 $H_n(\mathcal{C})$.

证明 由于对所有的 $n \in \mathbb{Z}$, $d_n = 0$, 故 $d_{n-1}d_n = 0$, 即 $\mathcal{C}$ 是一个复形. $Z_n(\mathcal{C}) = \operatorname{Ker} d_n = M$, $B_n(\mathcal{C}) = \operatorname{Im} d_{n+1} = 0$. 所以, $H_n(\mathcal{C}) = Z_n(\mathcal{C})/B_n(\mathcal{C}) = M$, 对所有 $n \in \mathbb{Z}$.

1.6 设有 R 模同态的短正合列

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0,$$

令 $C_0 = 0$, $C_1 = M''$, $C_2 = M$, $C_3 = M'$, $C_n = 0$ 对 $n > 3$, $d_2 = \beta$, $d_3 = \alpha$, 其余的 $d_n = 0$, 证明这样可得到链复形 $\mathcal{C} = (C_n, d_n)$. 并求同调模 $H_n(\mathcal{C})$.

证明 因为所给序列为短正合列, 所以 $d_2d_3 = \beta\alpha = 0$. 而对 $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 3$, d_{n-1}, d_n 中至少有一个为零映射, 故 $d_{n-1}d_n = 0$, 从而 $\mathcal{C}$ 为复形, 显然它是链复形. 由于定义 $\mathcal{C}$ 的 R 模同态列为正合列, 故 $H_n(\mathcal{C}) = 0$, 对所有 $n \in \mathbb{Z}$.

1.7 设 $\alpha : (C, d) \longrightarrow (C', d')$ 是两个链复形间的态射. 对 $n \in \mathbb{Z}$ 令 $C''_n = C_{n-1} \oplus C'_n$, 定义 $d''_n : C''_n \longrightarrow C''_{n-1}$ 为 $d''_n(c_{n-1}, c'_n) = (-d_{n-1}(c_{n-1}), \alpha_{n-1}(c_{n-1}) + d'_n(c'_n))$, 证明这样得到的 (C'', d'') 确是复形.

证明 任给 $(c_{n-1}, c'_n) \in C''_n$, $d''_{n-1}d''_n(c_{n-1}, c'_n) = d''_{n-1}(-d_{n-1}(c_{n-1}, \alpha_{n-1}(c_{n-1}) + d'_n(c'_n)) = (d_{n-2}d_{n-1}(c_{n-1}), -\alpha_{n-2}d_{n-1}(c_{n-1}) + d'_{n-1}(\alpha_{n-1}(c_{n-1}) + d'_n(c'_n))) = (0, -\alpha_{n-2}d_{n-1}(c_{n-1}) + \alpha_{n-2}d_{n-1}(c_{n-1}) + d'_{n-1}d'_n(c'_n)) = (0, 0)$. 所以, $d''_{n-1}d'_n = 0$, 对所有 n. 因此 (C'', d'') 确是复形.

2.1 证明命题 2.2.

证明 即要证对每个 $n \in \mathbb{Z}$, (1) $\tilde{\phi}_n\tilde{\alpha}_n = \tilde{\gamma}_n\tilde{\phi}'_n$, (2) $\tilde{\phi}''_n\tilde{\beta}_n = \tilde{\delta}_n\tilde{\phi}_n$, (3) $\tilde{\phi}'_{n-1}\Delta_n = \Delta_n\tilde{\phi}''_n$. 对任意 $[z'_n] \in H_n(\mathcal{C}')$, $\tilde{\phi}_n\tilde{\alpha}_n[z'_n] = [(\phi_n\alpha_n)z'_n]$, $\tilde{\gamma}_n\tilde{\phi}'_n[z'_n] = [(\gamma_n\phi'_n)z'_n]$, 由于 $\phi\alpha = \gamma\phi'$, 所以, $\phi_n\alpha_n = \gamma_n\phi'_n$. 因此, (1) 成立. 同理可证 (2) 式. 下面证明 (3) 式. 假设复形 $\mathcal{D} = (D_n, t_n)$. 任给 $[z''_n] \in H_n(\mathcal{C}'')$, 由于 $\phi_{n-1}\alpha_{n-1} = \gamma_{n-1}\phi'_{n-1}$ (命题假设: $\phi\alpha = \gamma\phi'$), $\phi_{n-1}d_n = t_n\phi_n$ (ϕ 是 $\mathcal{C}$ 到 $CalD$ 的态射), $\phi''_n\beta_n = \delta_n\phi_n$ (命题假设: $\phi''\beta = \delta\phi$), 所以, $\tilde{\phi}'_{n-1}\Delta_n[z''_n] = [\phi'_{n-1}\alpha^{-1}_{n-1}d_n\beta^{-1}_n(z''_n)] = \gamma^{-1}_{n-1}\phi_{n-1}d_n\beta^{-1}_n(z''_n)] = \gamma^{-1}_{n-1}t_n\phi_n\beta^{-1}_n(z''_n)] = \gamma^{-1}_{n-1}t_n\delta^{-1}_n\phi''_n(z''_n)] = \Delta_n\phi''_n[z''_n]$, 即 (3) 式成立.

2.2 证明同伦关系是传递的, 即从 $\alpha \sim \beta$ 和 $\beta \sim \gamma$ 可得 $\alpha \sim \gamma$.

证明 若 $\alpha \sim \beta$, 即存在一族 R 模同态 $s_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$, 使 $\alpha_n - \beta_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$, $\beta \sim \gamma$, 即存在另一族 R 模同态 $t_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$, 使 $\beta_n - \gamma_n = d'_{n+1}t_n + t_{n-1}d'_n$. 则 $\alpha_n - \gamma = (\alpha_n - \beta_n) + (\beta_n - \gamma_n) = d'_{n+1}(s_n + t_n) + (s_{n-1} + t_{n-1})d_n$. 而 $s_n + t_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$ 也是 R 模同态, 故 $\alpha \sim \gamma$.

2.3 设有复形间的态射 $\alpha, \beta : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, $\gamma, \delta : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}''$. 证明从 $\alpha \sim \beta$ 和 $\gamma \sim \delta$ 可以得到 $\gamma\alpha \sim \delta\beta$.

证明 由于 $\alpha \sim \beta$, 故存在一族 R 模同态 $s_n : C_n \longrightarrow C'_{n+1}$, 使 $\alpha_n - \beta_n = d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n$. $\gamma - \delta$, 故存在另一族 R 模同态 $t_n : C'_n \longrightarrow C''_{n+1}$, 使 $\gamma_n - \delta_n = d''_{n+1}t_n + t_{n-1}d''_n$. 则 $\gamma_n\alpha_n - \delta_n\beta_n = \gamma_n(\alpha_n - \beta_n) + (\gamma_n - \delta_n)\beta_n = \gamma_n(d'_{n+1}s_n + s_{n-1}d_n) + (d''_{n+1}t_n + t_{n-1}d'_n)\beta_n = d''_{n+1}(t_n\beta_n) + (\gamma_n s_{n-1})d_n + \gamma_n d'_{n+1}s_n + t_{n-1}d'_n\beta_n = d''_{n+1}(t_n\beta_n + \gamma_{n+1}s_n) + (\gamma_n s_{n-1} + t_{n-1}\beta_{n-1})d_n = d''_{n+1}q_n + q_{n-1}d_n$, 其中, $q_n = t_n\beta_n + \gamma_{n+1}s_n : C_n \longrightarrow C''_{n+1}$ 是 R 模同态. 从而 $\gamma\alpha \sim \delta\beta$.

2.4 设 $R = \mathbb{Z}$. 有两个复形 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 分别定义为:

$$C_1 = \mathbb{Z}s_1, \qquad C_0 = \mathbb{Z}s_0, \qquad C_n = 0, n \neq 0, 1; \qquad d_1(s_1) = 2s_0;$$

$$C'_1 = \mathbb{Z}t_1, \qquad C'_n = 0, n \neq 1.$$

态射 $\alpha : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ 定义为:

$$\alpha_1(s_1) = t_1, \qquad \alpha_n = 0, n \neq 1.$$

试验证 α 以及零态射 $0 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ 都诱导了同调模间的零同态, 但是 α 不同伦于 0.

证明 首先, $H_0(\mathcal{C}) = \mathbb{Z}_2$, 而 $H_1(\mathcal{C}) = 0$ (其余 $H_n(\mathcal{C}) = 0$). $H_0(\mathcal{C}') = 0$, 而 $H_1(\mathcal{C}') = \mathbb{Z}t_1$ (其余 $H_n(\mathcal{C}') = 0$). 所以显然 $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_1 = 0$. 从而 α 以及零态射都诱导了同调模间的零同态. 若 α 与 0 同伦, 则存在态射 $q_0 : C_0 \longrightarrow C_1'$, 使得 $\alpha_1 = q_0 d_1$, 从而 $t_1 = \alpha_1(s_1) = q_0 d_1(s_1) = q_0(2s_0) = 2q_0(s_0)$. 显然这样的 $q_0(s_0) \in C_1'$ 是不存在的. 所以, α 与 0 不同伦.

3.1 设 F 是域, $R = F[x, y]$, $M = \langle f(x, y), g(x, y)\rangle$ 是 R 的理想, 被看作 R 模. 假定 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 是互素的多项式. 试作出 M 的自由分解.

解答 作复形 $\mathcal{C} = (C_n, d_n)$ 如下: 令 $C_1 = R$, $C_0 = R^2$, 对其余 n, $C_n = 0$. $d_1 : h \longmapsto (hg, -hf)$, $\varepsilon : (f_1, f_2) \longmapsto f_1 f + f_2 g$. 由 M 的定义知, ε 是从 C_0 到 M 的满同态. 而任给 $(f_1, f_2) \in \operatorname{Ker}\varepsilon$, 则 $f_1 f + f_2 g = 0$, 从而 $f_1 f = -f_2 g$, 由于 f 与 g 互素, 故由 g 能整除上述等式右边德它能整除等式左边, 即 $f_1 = hg$, 其中 $h = h(x, y) \in R$, 于是 $f_2 = -hf$, 所以, $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Im} d_1$. 而 d_1 显然是单一同态, 所以, $(\mathcal{C}, \varepsilon)$ 是 M 的自由分解.

3.2 设 R 是一个主理想整环. 证明每个有限生成的 R 模都存在一个使 $C_n = 0$ $(n > 1)$ 的自由分解. (提示: 利用第一章的定理 4.6)

证明 设 M 是任一有限生成 R 模, n 为生成元的个数. 令 $C_0 = R^n$, $\varepsilon : C_0 \longrightarrow M$ 为把 R 模同态, 它把 C_0 中的一组基对应于 M 中的一组生成元. 令 $C_1 = \operatorname{Ker}\varepsilon$, 则 C_1 为 C_0 的子模, 且由于 R 是主理想整环, 所以由第一章定理 4.6, C_1 也是自由模, 令 $d_1 : C_1 \longrightarrow C_0$ 为嵌入同态, $C_n = 0$, 对 $n > 1$. 则 $\mathcal{C} = (C_n, d_n)$ 是复形, 且 $(\mathcal{C}, \varepsilon)$ 是 M 的自由分解.

3.3 设 M 是环 $\mathbb{Z}$ 内由 6 和 9 生成的理想. 试写出 $\mathbb{Z}$ 模 M 的两种不同的自由分解.

证明 定义复形 $\mathcal{C} = (C_n, d_n)$ 如下: $C_0 = \mathbb{Z}$, 而 $C_n = 0$, 对 $n > 0$. $\varepsilon : C_0 \longrightarrow M$ 为 $\varepsilon(x) = 3x$. 由于 $M = \langle 6, 9\rangle = \langle 3\rangle$, 所以, ε 是双射. 即 $(\mathcal{C}, \varepsilon)$ 是 M 的一个自由分解. 定义复形 $\mathcal{C}' = (C_n', d_n')$ 如下: $C_0' = \mathbb{Z}^2$, $C_1' = \mathbb{Z}$, $C_n' = 0$, 对 $n > 1$. $d_1' : C_1' \longrightarrow C_0'$ 为 $d_1'(z) = (3z, -2z)$, $\varepsilon' : C_0' \longrightarrow M$ 为 $\varepsilon'(x, y) = 6x + 9y$. 则可证 $(\mathcal{C}', \varepsilon')$ 为 M 的一个自由分解. 显然这是两个不同的分解.

4.1 证明当 P 是投射模时, 对所有的 $n > 0$ 有 $L_n F(P) = 0$.

证明 取 $(\mathcal{C}, \varepsilon)$ 为这样的 P 的投射分解: $C_0 = P$, $C_n = 0$, 对所有 $n > 0$, $\varepsilon = 1_P$. 从而 $L_n F(P) = H_n(F\mathcal{C}) = 0$, 对所有 $n > 0$.

5.1. 计算 $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_s)$ 以及 $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_s, \mathbb{Z}_t)$.

解答 根据左导出函子的性质 (LD1), 有: $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_s) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_s \cong \mathbb{Z}_s$. 而 $\operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_s, \mathbb{Z}_t) \cong \mathbb{Z}_s \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_t \cong \mathbb{Z}_{(s,t)}$, 这里 (s, t) 表示 s 和 t 的最大公因数 (见第一章练习 7.1(2)). 由于 $\mathbb{Z}$ 是投射 $\mathbb{Z}$ 模, 故由 (LD2), 得 $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_s) = 0$, 对所有 $n > 0$. 对 $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_s, \mathbb{Z}_t)$, 根据例 5.1, 有 $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_s, \mathbb{Z}_t) = 0$, 对所有 $n > 1$, 而 $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_s, \mathbb{Z}_t) = \{\overline{m} \in \mathbb{Z}_s \mid t\overline{m} = \overline{0}\} \cong \mathbb{Z}_{(s,t)}$.

6.1. 计算 $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$, $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m)$, $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z})$, $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n)$.

解答 由于 $\mathbb{Z}$ 是投射 $\mathbb{Z}$ 模, 故由定理 6.2(2), $\operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \operatorname{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m) = 0$. 考虑 $\mathbb{Z}_m$ 的投射分解: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}_m \to 0$, 其中 $d_1(x) = mx$, ε 为自然同态. 对复形作用 $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z})$,

有: $0 \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \xrightarrow{\tilde{d}_1} \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \to 0$. 由于 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$, 而在此同构下, $\tilde{d}_1$ 相当于映射: $x \longmapsto mx$. 所以, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}) = H^1(\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$. 与此类似地, 我们有 $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_m,\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n/m\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$.

6.2. 试构造 $E(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$ 的所有不同构的扩张 (作为 $\mathbb{Z}$ 模).

解答 首先我们有分裂扩张: $0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$, 其中所涉及的态射是自然的. 此外, 我们还有另一扩张: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_2 \to 0$, 其中, $f(x) = 2x$, 而 g 为自然同态. 显然这也是一个扩张. 两扩张显然不同构. 再由上题知道, $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$, 又由定理 6.3, $E(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$ 与 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$ 之间是一一对应的, 从而知 $E(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})$ 的所有不同构的扩张只有两个, 即上述两个.