

## 《高等代数》测试题 (2002.6.)

### 一、是非题

1. 设  $A^2 = E$ , 则  $A$  一定等于  $E$  或  $-E$  ( $E$  为单位方阵). ( )
2. 设  $A$  是  $n$  阶方阵, 且  $A^2 - A + E = 0$ , 则  $A$  是可逆的. ( )
3. 设线性变换  $\mathcal{A}$  在基  $\alpha_1 = (1, 2), \alpha_2 = (2, 1)$  下的矩阵是  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ , 则存在另一基  $\beta_1, \beta_2$ , 使得  $\mathcal{A}$  在  $\beta_1, \beta_2$  下的矩阵是  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . ( )
4. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_s$  是  $n$  维欧氏空间中的一非零正交向量组, 则  $s \leq n$ . ( )
5. 如果向量组  $\alpha, \beta$  线性相关, 那么存在数  $k$ , 使得  $\alpha = k\beta$ . ( )

### 二、填空题

6. 如果矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ , 则  $A^{-1} =$  \_\_\_\_\_.
7. 设  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $f(x) = x^2 - x + c$ , 如果  $|f(A)| = 0$ , 则  $c =$  \_\_\_\_\_.
8. 设  $\tau = (3, 1, 7, 5, 2, 4, 6)$  为一个 7 阶排列, 则  $\tau$  的逆序数等于 \_\_\_\_\_.
9. 设  $A, B, C$  都是 3 阶方阵, 秩  $(A) = 2$ , 秩  $(B) = 3$ , 则秩  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} =$  \_\_\_\_\_.
10. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

则  $A^* =$  \_\_\_\_\_.

11. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

矩阵  $X$  满足  $AX - 3B + C = 0$ , 则  $X =$  \_\_\_\_\_.

12. 多项式  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 14$  的有理根为 \_\_\_\_\_.

13. 设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & k & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix},$$

是个正定矩阵, 则实数  $k$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

14. 从基  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  到基  $\eta_2, \eta_3, \eta_1$  的过渡矩阵  $T =$  \_\_\_\_\_.

15. 如果线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

有唯一解, 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

16. 如果  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  是某个实系数非齐次线性方程组的解, 那么  $\eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + k_3\eta_3$  也是该方程组的解的充分必要条件是实数  $k_1, k_2, k_3$  满足  $k_1 + k_2 + k_3 =$  \_\_\_\_\_.

17. 设  $W_1$  和  $W_2$  分别是线性空间  $V$  的 3 维和 4 维子空间, 且  $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ , 则  $\dim(W_1 + W_2) =$  \_\_\_\_\_.

### 三、单选题

18. 设  $A$  为实矩阵, 则

- (A) 秩( $A$ ) = 秩( $A^T A$ ); (B) 秩( $A$ ) < 秩( $A^T A$ );  
(C) 秩( $A$ ) > 秩( $A^T A$ ); (D) 秩( $A$ ) 与秩( $A^T A$ ) 间大小关系不定.

19. 设  $\alpha_0 = (1, -1, 2, 0)$ . 问: 最多可添加多少个向量  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ , 使得  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  仍然是线性无关的向量组?

- (A)  $r = 1$ ; (B)  $r = 2$ ; (C)  $r = 3$ ; (D)  $r = 4$ .

20. 如果向量组 (I) 可由向量组 (II) 线性表示, 则

- (A) (I) 的秩 = (II) 的秩; (B) (I) 的秩  $\leq$  (II) 的秩;  
(C) (I) 的秩  $\geq$  (II) 的秩; (D) (I) 的秩与 (II) 的秩间大小关系不定.

21. 下列命题中正确的是

- (A) 如果有理系数多项式  $f(x)$  在有理数域上不可约, 则  $f(x)$  一定没有有理根;  
(B) 如果有理系数多项式  $f(x)$  没有有理根, 则  $f(x)$  在有理数域上不可约;  
(C) 如果有理系数多项式  $f(x)$  在实数域上不可约, 则  $f(x)$  在有理数域上也不可约;  
(D) 任何多项式在复数域上都是可约的.

22. 设线性方程组  $AX = B$  的增广矩阵为  $\tilde{A}$ . 如果该方程组无解, 且秩( $A$ ) = 3, 则秩( $\tilde{A}$ ) 等于

- (A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

23. 下列命题中错误的是

- (A) 若一向量组线性无关, 则其部分组必线性无关;  
(B) 包含零向量的向量组必线性相关;  
(C) 若一向量组线性相关, 则其部分组必线性相关;  
(D) 若一向量组线性无关, 则其延伸组必线性无关.

24. 如果  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\mathcal{A}$  可逆, 则  $\mathcal{A}$  的属于特征值 0 的线性无关的特征向量的个数

- (A) = 0; (B) = 1; (C) =  $n$ ; (D) 不能确定.

25. 设  $n$  元线性方程组  $AX = 0$  与  $BX = 0$  的解空间分别是  $V_1$  与  $V_2$ , 则联立方程组

$$\begin{cases} AX = 0 \\ BX = 0 \end{cases}$$

的解集为

- (A)  $V_1 + V_2$ ; (B)  $V_1 \cup V_2$ ; (C)  $V_1 \cap V_2$ ; (D) 空集.

26. 如果  $n$  维线性空间  $V$  上的线性变换  $\mathcal{A}$  满足  $\mathcal{A}^2 = 0$ , 则  $\mathcal{A}$  的属于特征值 0 的线性无关的特征向量的个数

- (A) = 0; (B) = 1; (C) =  $n$ ; (D) 不能确定.

27. 设  $A$  与  $B$  相似, 设  $C$  与  $D$  相似, 问以下四对矩阵中哪一对不一定相似?

- (A)  $A^3$  与  $B^3$ ; (B)  $A + 2E$  与  $B + 2E$ ;  
 (C)  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$  与  $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$ ; (D)  $A + C$  与  $B + D$ .

28. 设  $A$  是正定矩阵,  $k$  是任一实数, 则  $kA$  必不是

- (A) 不定的; (B) 负定的; (C) 正定的; (D) 半正定但非正定的.

29. 设  $A, B$  是  $n$  阶正交矩阵, 问以下哪个矩阵不一定是正交矩阵?

- (A)  $A + B$ ; (B)  $AB$ ; (C)  $A^{-1}$ ; (D)  $-B$ .

30. 设  $\mathbb{R}$  上的由矩阵组成的线性空间

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \mid a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0 \right\},$$

那么  $V$  的维数为

- (A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6.

#### 四、多选题

31. 设  $A, B$  均为  $n$  阶方阵, 试问下列命题中哪些是正确的?

- (A) 若  $AB = 0$ , 则  $A = 0$  或  $B = 0$ ;  
 (B)  $(A + E)^2 = A^2 + 2A + E$  ( $E$  为单位方阵);  
 (C)  $(AB)^T = A^T B^T$ ;  
 (D)  $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$  (假设  $|A| \neq 0, |B| \neq 0$ );  
 (E)  $|kA| = k|A|$  (这里  $k$  是任一数).