华 东 师 范 大 学

## 理工学院数学系期终考试试题 (2002年1月)

**考试科目:** 高等代数与解析几何　　**专 业:** 数 学（基地班）

共2页

**一、叙述概念和结果 (15分)**

1. 矩阵间的等价;　　2. 线性方程组的初等变换;　　3. 克拉默法则.

**二、选择题 (本大题满分为12分, 每小题答对得3分, 答错不得分. 每小题中有且仅有一个正确答案.)**

1. 设$\widetilde{A}$为线性方程组$AX=B$的增广矩阵, 若已知该方程组无解, 且$\mathrm{rank}(\widetilde{A})\in\{2,3,4\}$, 问以下哪个数不可能是$\mathrm{rank}(A)$的取值?

(A) 1;　　(B) 2;　　(C) 3;　　(D) 4.

2. 以下四个命题中哪个是错误的?

(A) 若向量组中含有零向量, 则该向量组线性相关;

(B) 若向量组线性无关, 则其部分组线性无关;

(C) 若向量组线性相关, 则其延伸组线性相关;

(D) 若向量组的秩等于其向量个数, 则该向量组线性无关.

3. 以下四个命题中哪个不成立?

(A) 若$A\in M_{\mathrm{n}}(K)$ $(n>2)$, 则$|A^*|=|A|^{\mathrm{n}-2}$;

(B) 若$A, B\in M_{\mathrm{n}}(K)$, 且$A, B$可逆, 则$AB$也可逆, 且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(C) 若$A$是奇数阶反称矩阵, 则$|A|=0$;

(D) 设$A, B\in M_{\mathrm{n}}(K)$, 且$AB=3E_{\mathrm{n}}$, 则$(A+B)^2=A^2+B^2+6E_{\mathrm{n}}$.

4. 设有$V=K^3$上的线性变换$\mathcal{A}$: $(x,y,z)\mapsto(0,0,-x)$, $e_1,e_2,e_3$是$V$的自然基, 则$\mathcal{A}$的核空间为

(A) 0;　　(B) $L(e_3)$;　　(C) $L(e_1,e_2)$;　　(D) $L(e_2,e_3)$.

**三、填空题 (本大题满分为16分, 每小题答对得4分, 答错不得分.)**

1. 已知混合积$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=3$, 则$(3\vec{b},\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=$ ____________ .

2. 若$A$, $B \in M_4(K)$, 且$|A| = -1$, $|B| = 2$, 则矩阵$A^{\mathsf{T}}B^{-1}$的行列式等于 ______________ .

3. 如果$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, 则$(4A)^{-1}$等于 ______________ .

4. 设在空间直角坐标系下, $A = (2,0,0)$, $B(2,1,2)$, $C(0,-1,4)$, 则空间$\triangle ABC$的面积等于 ______________ .

**四、(本题满分为12分)** 选择$\lambda$, 使方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 \\ \lambda x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

有解, 并求它的全部解.

**五、(本题满分为10分)** 求矩阵$A$的逆矩阵, 其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ -9 & 3 & 6 & -2 \\ 21 & -6 & -14 & 4 \end{pmatrix}.$$

**六、(本题满分为12分)** 设有直线

$$L: \begin{cases} x - 2y + 4z - 4 = 0 \\ 2x - 3y + z - 7 = 0 \end{cases}$$

1. 求过点$P(1,1,1)$和直线$L$的平面$\Pi$的一般方程;
2. 求直线$L$的标准方程.

**七、(本题满分为12分)** 设$A$, $B \in M_n(K)$, 且$A$, $B$可逆.

1. 证明: $(AB)^* = B^*A^*$;
2. 对$(A^{-1})^*$, 你能得出什么结论? 如何证明?

**八、专业英语 (本题满分为5分)**

1. 线性变换, 行列式; 2. augmented matrix, Gauss elimination; 3. $\varepsilon$, $\delta$.

**九、(本题满分为6分)** 设$A \in M_n(K)$, $\mathrm{rank}(A) = r < n$. 证明: 存在$n-r$个秩等于$n-1$的矩阵$B_i \in M_n(K)$, $i = 1, 2, \ldots, n-r$, 使得$A = B_1B_2\cdots B_{n-r}$.