华 东 师 范 大 学

2002年攻读硕士学位研究生入学试题

考试科目: 抽象代数

招生专业: 基础数学

共 1 页

一. (10分) 设G是群, a, $b \in G$. 证明: ab与ba的阶相同.

二. (10分) 设$G = S_n$是n次对称群, H是G的子群. 证明: 若H中存在奇置换, 则H的阶必为偶数.

三. (20分) 设G是群, x, $y \in G$, 称$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$为x, y的**换位子**. 设G'是G中由所有换位子$[x, y]$生成的子群, 称为G的**换位子群**.
(1) 证明: G'是G的正规子群;
(2) 若H是G的正规子群, 且G/H是交换群, 证明: $G' \subseteq H$;
(3) 对$G = S_4$, 求G'.

四. (16分) (1) 设ϕ是从Z_m到Z_n的环同态. 证明: $\phi(1)$是Z_n中的幂等元(即满足$a^2 = a$的元素a).
(2) 求Z_6到Z_6的所有环同态.

五. (14分) 求环Z_{36}的所有理想与极大理想, 并说明理由.

六. (20分) 设Q为有理数域. $\beta = \sqrt[3]{5} - 2$.
(1) 求β在Q上的最小多项式;
(2) 将$\dfrac{1}{\beta + 1}$写成Q上β的最低次多项式;
(3) 求$\mathrm{Q}(\beta)$在Q上的一组基.

七. (10分) 设F是个特征p的域, $f(x)$是F上的不可约多项式. 证明: 若$f(x)$有重根, 则必存在多项式$g(x) \in F[x]$, 使得$f(x) = g(x^{\mathrm{p}})$.