§7　置换在对称变换群中的应用

我们都熟悉对称这个概念, 自然界中充满了对称的现象. 而现实世界的这种对称现象总是以某种方式与我们在前一节中所讨论的置换群相联系. 艺术家和科学家们发现, 可以用置换和置换群来很好地刻画他们在艺术创作和科学研究中所遇到的种种对称现象. 艺术家们使用对称与置换来帮助他们设计与构作美妙的图案, 物理学家们使用对称与置换来确定晶体的种类, 化学家们使用对称与置换去研究分子内部的结构. 也许, 一个最具说服力的例子是, 1962 年, 物理学家格尔曼 (Murray Gell-mann, 又译“盖尔曼”, 1929—, 获 1969 年诺贝尔物理学奖) 和尼曼 (Yuval Ne’eman) 应用群的理论预言, 存在着一种被称为 Ω-负粒子的新粒子. 两年之后这个预言在实验室里被证实. 这充分显示了理论对于实践的指导意义. 在这一节中, 我们将通过例子来说明置换在研究对称变换中的应用.

定义 1　*使图形不变形地变到与自身重合的变换称为这个图形的***对称变换** (*symmetric transformation*). *一个图形的一切对称变换关于变换的乘法构成群, 这个群称为这个图形的***对称变换群**.

一个图形的对称变换群常可以用一个置换群来表示, 它能很好地反映图形的对称性质, 是研究图形的对称性质的有力工具.

例 1 求正方形的对称变换群.

由图 7.1 不难看出, 正方形的对称变换只有两种:

(1) 分别绕中心点 O 按逆时针方向旋转 $90°$, $180°$, $270°$, $360°$的旋转;

(2) 关于直线 L_1, L_2, L_3, L_4 的镜面反射.

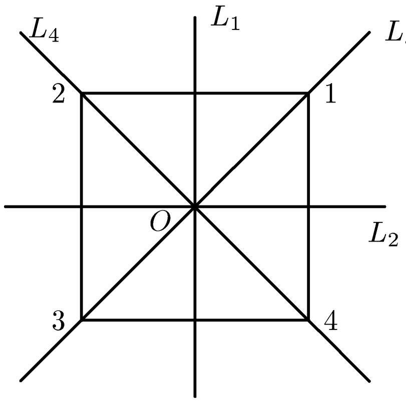

图 7.1

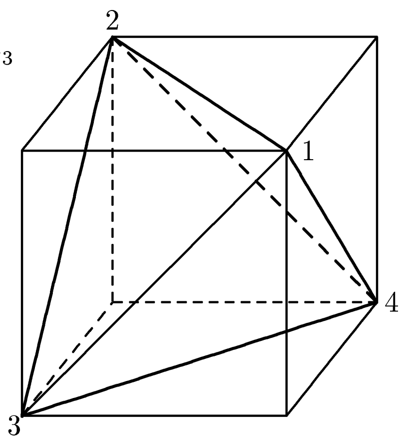

图 7.2

为了用置换来表示正方形的对称变换, 我们用数字 1, 2, 3, 4 来代表正方形的四个顶点 (如图 7.1). 显然, 正方形的每一个对称变换都导致了这四个顶点的一个置换. 如果对称变换将顶点 i 变为顶点 k_i, 那么我们用置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \end{pmatrix}$$

来表示这个对称变换. 易知, 由正方形的每一个对称变换, 都可惟一地确定一个 4 阶置换, 且不同的对称变换对应了不同的置换. 所以, 正方形的每一个对称变换, 都可用惟一的一个四阶置换来表示. 表 7.1 列出了正方形的对称变换及其相应的置换表示.

对称变换	置换表示
c 表示绕中心旋转 $90°$	$(1\,2\,3\,4)$
c^2 表示绕中心旋转 $180°$	$(1\,3)(2\,4)$
c^3 表示绕中心旋转 $270°$	$(1\,4\,3\,2)$
c^4 表示绕中心旋转 $360°$ (恒等变换)	(1)
v_1 表示关于 L_1 的反射	$(1\,2)(3\,4)$
v_2 表示关于 L_2 的反射	$(1\,4)(2\,3)$
v_3 表示关于 L_3 的反射	$(2\,4)$
v_4 表示关于 L_4 的反射	$(1\,3)$

表 7.1

由表 7.1 可知, 两个对称变换的乘积对应于相应的置换的乘积. 所以正方形的对称变换群是 S_4 的一个子群, 记作 D_4. 由表 7.1 可知 $|D_4| = 8$. □

一般地, 正 n 边形 $(n \geqslant 3)$ 的对称变换群是 S_n 的一个子群, 记作 D_n, 称为二面体群. 易知, 正 n 边形有 n个旋转 (包括恒等变换) 和 n 个反射, 所以, 二面体群的阶数是 $2n$.

例 2 求正四面体的对称变换群.

一个正四面体可以内接于一个正方体 (见图 7.2). 把正四面体的四个顶点标上 1, 2, 3, 4 四个数字, 则正四面体的每一个对称变换都可用一个 4 阶置换来表示. 因此, 正四面体的对称变换群是 S_4 的一个子群. 共有 24 个 4 阶置换, 但并非每一个置换都表示正四面体的对称变换. 如镜面反射 $(1\,2)$ 就不是正四面体的对称变换. 容易看出, 绕任一条过正四面体的一个顶点及其对面中心的轴按逆时针方向旋转 $120°$, $240°$的旋转是正四面体的对称变换, 这样的变换有 8个. 另一方面, 绕任一条过正方体的对面中心的轴旋转 $180°$的旋转也是正四面体的对称变换, 这样的变换有 3个. 再加上恒等变换, 共 12 个对称变换. 所以, 正四面体至少有 12 个对称变换, 且这些变换都是旋转. 又因为镜面反射 $(1\,2)$ 不是正四面体的

对称变换, 所以镜面反射 $(1\,2)$ 与上述 12 个旋转的乘积也都不是正四面体的对称变换. 由此可知, 上述 12 个旋转恰是正四面体的全部对称变换. 这 12 个对称变换用轮换的形式写出就是

$$\begin{array}{cccccc} (1), & (2\,3\,4), & (2\,4\,3), & (1\,3\,4), & (1\,4\,3), & (1\,2\,4), \\ (1\,4\,2), & (1\,2\,3), & (1\,3\,2), & (1\,2)(3\,4), & (1\,3)(2\,4), & (1\,4)(2\,3). \end{array}$$

因此, 正四面体的对称变换群就是4次交代群 A_4. □

我们知道, 总共存在五种正多面体. 除了正四面体, 还有立方体、正八面体、正十二面体和正二十面体. 利用第二章第五节例5的方法, 可以求得这几个正多面体的对称变换群的阶数分别是24、24、 60、60. 它们分别是4次对称群和5次交代群.

设$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是数域K上的一个n元多项式. 如果集合$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$的一个置换保持多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$不变, 则称这个置换为多项式$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的一个对称变换. 易知, 多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体对称变换关于变换的合成构成 S_n 的一个子群, 这个群称为多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称变换群 (见习题3).

例 3 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是数域 K 上的一个 n 元多项式. 则多项式 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称变换群等于 S_n 的充分必要条件是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 n 元对称多项式. □

例 4 试求多项式 $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ 的对称变换群.

解 我们用置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4 \end{pmatrix}$$

表示将 x_k 变到 x_{i_k} 的变换. 易知, 多项式 $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ 的任一置换最多只能将 x_1 与 x_2 或 x_3 与 x_4 互换. 所以, 多项式 $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ 的对称变换群 G 是由 $(1\,2)$ 与 $(3\,4)$ 生成的群, 即 $G = \langle (1\,2), (3\,4) \rangle$. 从而, $x_1 + x_2 - x_3 - x_4$ 的对称变换群为

$$G = \{(1), (1\,2), (3\,4), (1\,2)(3\,4)\}. \quad \square$$

习题 1 − 5

1. 试求正三角形的对称变换群. 这个群即为氨分子 NH_3 的对称变换群 (见图 7.3). (其中 π_1, π_2, π_3 为三个反射对称平面).

2. 试求水分子 H_2O 的对称变换群 (见图 7.4).

3. 在下列置换中, 哪些是多项式

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4$$

的对称变换?

(1) $(1\,2)(3\,4)$; (2) $(1\,2\,3\,4)$;

(3) $(1\,3\,2\,4)$; (4) $(3\,4)$;

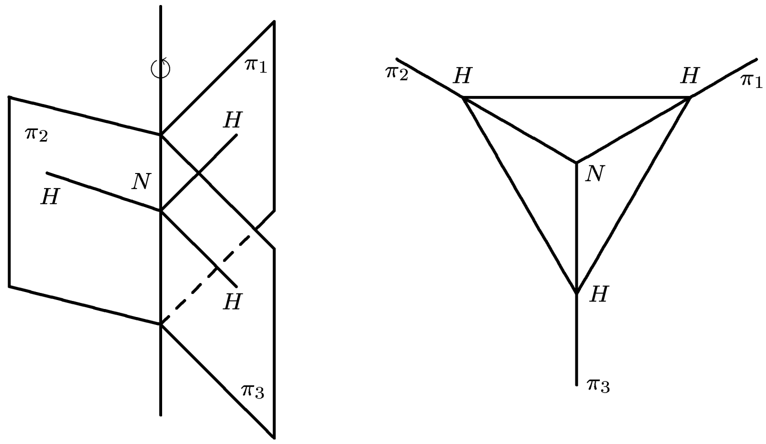

图 7.3

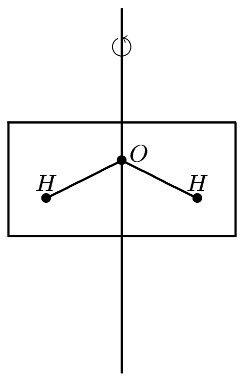

图 7.4

(5) $(1\,3)(2\,4)$;　　(6) $(1\,2\,3)$.

证明: 表示多项式的对称变换的所有置换的集合构成一个群. (这个群称为多项式的对称变换群.)

4. 求下列多项式的对称变换群:

(1) $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 \in K[x_1, x_2, x_3]$;

(2) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_1x_4 \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$;

(3) $x_1x_2 - x_2x_3 + x_3x_4 - x_4x_1 \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$;

(4) $x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_1 \in K[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

5. 试求所有的 4 元多项式 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, 使其中每一个都以

$$G = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (2\ 4) \rangle$$

为其对称变换群.

6. 写出正五边形的对称变换群 D_5.

7. 写出正六边形的对称变换群 D_6.

8. 在 D_n 中, 用几何方法说明为何两个反射的复合是一个旋转.

9. 在 D_n 中, 用几何方法说明为何两个旋转的复合是一个旋转.

10. 在 D_n 中, 用几何方法说明为何一个反射与一个旋转的复合是一个反射.

11. 确定 D_n $(n \geqslant 3)$ 中的元素个数. 问 D_n 中有多少个反射?

12. 证明: D_n 与 2 阶正交群 $O_2(\mathbb{R})$ 的子群同构 (见习题 2.3). 在此同构下, 旋转对应于行列式为 1 的矩阵, 反射对应于行列式为 -1 的矩阵 (用此也可解释习题 8, 9, 10).

13. 试求二面体群 D_n 的中心 $C(D_n)$.

14. 对以下各图标, 确定其对称变换群.

15. 证明: 正方形的对称变换群与多项式 $(x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$ 的对称变换群同构.

参考文献及阅读材料

[1] 张奠宙等编, 科学家大辞典, 上海: 上海辞书出版社; 上海科技教育出版社. 2000

本书是一本多学科科学家的辞典, 其中有对许多数学家和物理学家的介绍. 在物理学家格尔曼的生平中也包括了对 Ω-负粒子发现经过的简单介绍.

[2] Discovery of the Omega-minus Particle, 美国 Brookhaven 国家实验室网页, 网址为:

http://www.bnl.gov/bnlweb/history/Omega-minus.htm