矩阵方幂的特征多项式

林　磊 (华东师范大学数学系　上海　200062)

摘　要　给出四种方法, 分别根据特征多项式的性质, 多项式根与系数之间的关系以及对称多项式的知识, k 次本原单位根, 特征多项式的伴侣阵, 可在矩阵的特征多项式已知的情况下确定其矩阵方幂的特征多项式.

关键词　矩阵; 特征多项式; 对称多项式; 本原根; 伴侣阵

中图分类号　O152.21

华东师范大学数学系2003年攻读硕士学位研究生入学试题《高等代数》卷第17题为:

已知矩阵 A 的特征多项式 $f(\lambda)=\lambda^3-7\lambda^2+13\lambda-6$, 求矩阵 A^3 的特征多项式 $g(\lambda)$.

此题通常的解法如下:

[**解法一**] 用试根法确定出 $\lambda=2$ 是 $f(\lambda)$ 的一个有理根, 因此

$$\begin{aligned} f(\lambda)&=(\lambda-2)(\lambda^2-5\lambda+3)\\ &=(\lambda-2)\left(\lambda-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right). \end{aligned}$$

所以, $f(\lambda)$ 的三个根为 $\lambda_1=2$, $\lambda_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. 于是 A^3 的三个特征值为 λ_1^3, λ_2^3, λ_3^3. 即

$$g(\lambda)=\prod_{j=1}^{3}(\lambda-\lambda_j^3).$$

由于 $\lambda_{2,3}^3=40\pm\sqrt{13}$, 因此

$$\begin{aligned} g(\lambda)&=(\lambda-\lambda_1^3)(\lambda^2-(\lambda_2^3+\lambda_3^3)\lambda+\lambda_2^3\lambda_3^3)\\ &=(\lambda-8)(\lambda^2-80\lambda+27)\\ &=\lambda^3-88\lambda^2+667\lambda-216.\quad\square \end{aligned}$$

如果我们利用对称多项式的性质及根与系数之间的关系, 则又可以有如下的解法:

[**解法二**] 设 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 $f(\lambda)$ 的三个根,

$$\sigma_1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\quad \sigma_2=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3,\quad \sigma_3=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

是三个根的初等对称多项式. 则有: $\sigma_1=7$, $\sigma_2=13$, $\sigma_3=6$, 故

$$\begin{aligned} \tau_1&:=\lambda_1^3+\lambda_2^3+\lambda_3^3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3=88,\\ \tau_2&:=\lambda_1^3\lambda_2^3+\lambda_1^3\lambda_3^3+\lambda_2^3\lambda_3^3=\sigma_2^3-3\sigma_1\sigma_2\sigma_3+3\sigma_3^2=667,\\ \tau_3&:=\lambda_1^3\lambda_2^3\lambda_3^3=\sigma_3^3=216. \end{aligned}$$

* 上海市重点学科以及上海市精品课程建设项目资助的项目.

于是,

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \prod_{j=1}^{3}(\lambda-\lambda_j^3) \\ &= \lambda^3-\tau_1\lambda^2+\tau_2\lambda-\tau_3 \\ &= \lambda^3-88\lambda^2+667\lambda-216. \quad \square \end{aligned}$$

设$\omega=e^{2\pi i/3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$是3次单位根, 则我们有下列恒等式:

$$x^3-y^3=(x-y)(x-\omega y)(x-\omega^2 y). \tag{$*$}$$

利用公式$(*)$以及特征多项式的定义, 我们可得本题的第三种解法.

[**解法三**] 由定义, $f(\lambda)=|\lambda E-A|$, 而$g(\lambda)=|\lambda E-A^3|$. 令$\mu$是未定元, 且使得$\lambda=\mu^3$, 则因为数量矩阵与任一矩阵都可交换, 并利用公式$(*)$, 有

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= |\lambda E-A^3|=|\mu^3E-A^3| \\ &= |(\mu E)^3-A^3|=|(\mu E_A)(\mu E-\omega A)(\mu E-\omega^2A)| \\ &= |\mu E-A|\cdot|\mu E-\omega A|\cdot|\mu E-\omega^2A| \\ &= |\mu E-A|\omega^3|\omega^2\mu E-A|\omega^6|\omega\mu E-A| \\ &= f(\mu)f(\omega^2\mu)f(\omega\mu). \end{aligned}$$

于是, 有

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= (\mu^3-7\mu^2+13\mu-6)(\mu^3-7\omega\mu^2+13\omega^2\mu-6)(\mu^3-7\omega^2\mu^2+13\omega\mu-6) \\ &= (\mu^3-7\mu^2+13\mu-6)\left[\left(\mu^3+\frac{7}{2}\mu^2-\frac{13}{2}\mu-6\right)^2+\frac{3}{4}(7\mu^2+13\mu)^2\right] \\ &= (\mu^3-7\mu^2+13\mu-6)(\mu^6+7\mu^5+36\mu^4+79\mu^3+127\mu^2+78\mu+36) \\ &= \lambda^3-88\lambda^2+667\lambda-216. \quad \square \end{aligned}$$

第四种解法是基于这样的考虑: 由于我们只给出了矩阵A的特征多项式, 而没有具体给出矩阵A本身, 因此我们就考虑能否找一个具体的矩阵A, 使A的特征多项式就是$f(\lambda)$, 那么我们就容易根据特征多项式的定义来求A^3的特征多项式$g(\lambda)$.

[**解法四**] 考虑取矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

则A的不变因子是1, 2, $f(\lambda)$, 经计算知,

$$A^3=\begin{pmatrix} 6 & 42 & 216 \\ -13 & -85 & -426 \\ 7 & 36 & 167 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$g(\lambda)=|\lambda E-A^3|=\lambda^3-88\lambda^2+667\lambda-216. \quad \square$$

下面, 我们来考虑上述各种解法的理论依据, 并比较各方法的适用范围.

对于第一种解法, 我们用到了特征多项式的如下两条性质:

性质1. 若$f(\lambda)$是n阶矩阵A的特征多项式, 而$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$在复数域$\mathbb{C}$上的全部特征值, 则

$$f(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda - \lambda_j).$$

性质2. 若$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$是$A$在$\mathbb{C}$上的全部特征值, $h(x)$是任一复系数多项式, 则$h(A)$的全部特征值为$h(\lambda_1), h(\lambda_2), \cdots, h(\lambda_n)$(见[1, p74, 习题11).

在解法一中, 取$h(x) = x^3$, 设A的特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则$A^3 = h(A)$的特征值为$\lambda_1^3, \lambda_2^3, \lambda_3^3$.

一般地, 若我们知道了n阶矩阵A的所有特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$(等价于从$A$的特征多项式$f(\lambda)$能求出所有的根), 则对任何正整数$k$(当$A$可逆时, 甚至可取任一整数), A^k的特征多项式为

$$(\lambda - \lambda_1^k)(\lambda - \lambda_2^k)\cdots(\lambda - \lambda_n^k).$$

在本题中, 由于$f(\lambda)$是三次整系数多项式, 因此我们还用到了求有理根(整根)的方法: 设r是首一多项式$f(\lambda)$的有理根, 则r是整数, 且$r \mid 6$(见[1, p231, 定理9.4).

与解法一相比, 解法二中不必具体求出A的所有特征值. 因此它比解法一更一般些. 但解法二需要用到多项式中根与系数之间的关系以及对称多项式的知识. 确切地说, 要用到对称多项式基本定理(见[1, p244, 定理2.1). 命题者最初设计本题时是希望通过本题来考查学生对对称多项式的掌握情况, 但后来考虑到解法二计算略复杂一些, 因此, 选择了一个有整数根的三次整系数多项式. 这样就使考生能自由地选择用求根或不求根的方法来解题.

对于解法三, 我们还可以得到如下更一般的结果:

定理. 设$f(\lambda)$是n阶方阵A的特征多项式, k是任一正整数, ω是k次本原单位根(例如: 取$\omega = e^{2\pi i/k}$), 则A^k的特征多项式为

$$g(\lambda) = \omega^{k(k-1)n/2}\prod_{j=0}^{k-1} f(\omega^j \mu),$$

其中$\mu^k = \lambda$.

证明 设ω, k的假设如上, 则我们有下列恒等式:

$$x^k - y^k = (x-y)(x-\omega y)\cdots(x-\omega^{k-1}y). \qquad (**)$$

可以看出, 公式$(**)$是$(*)$的推广. 利用公式$(**)$, 我们有

$$\begin{aligned}
g(\lambda) &= |\lambda E - A^k| = |\mu^k E - A^k| \\
&= |(\mu E - A)(\mu E - \omega A)\cdots(\mu E - \omega^{k-1}A)| \\
&= |\omega^{k(k-1)/2}(\mu E - A)(\omega^{k-1}\mu E - A)\cdots(\omega\mu E - A)| \\
&= \left(\omega^{k(k-1)/2}\right)^n |\mu E - A|\cdot|\omega^{k-1}\mu E - A|\cdots|\omega\mu E - A| \\
&= \omega^{k(k-1)n/2} f(\mu) f(\omega^{k-1}\mu)\cdots f(\omega\mu) \\
&= \omega^{k(k-1)n/2}\prod_{j=0}^{k-1} f(\omega^j\mu). \quad \square
\end{aligned}$$

从上述定理看出, A^k 的特征多项式 $g(\lambda)$ 不但与 A 的特征多项式 $f(\lambda)$ 有关, 而且与 k 次单位根有关, 且不管 k 取什么值, $g(\lambda)$ 都可以由 $f(\lambda)$ 的显式表示出来, 且从形式上来看, 表达式简洁而优美. 因此, 这是它优于解法二之处, 即它更具有理论上的价值.

下面我们来讨论解法四. 设 A 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

则矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

称为多项式 $f(\lambda)$ 的伴侣阵(或友阵)(见 [2, p352, 定义 8], 但该书中上述矩阵的右下角"$-a_1$"错印成"$-a_n$"了). 则 B 的不变因子是 $1, 1, \cdots, f(\lambda)$. 因此, B 的特征多项式也是 $f(\lambda)$ (见 [2, p356, 习题3). 而由性质2知, A^k 的特征多项式 $g(\lambda)$ 等于 B^k 的特征多项式. 因此,

$$g(\lambda) = |\lambda E - B^k|.$$

利用这一方法, 我们不仅能计算 A^k 的特征多项式, 还能计算 A 的任一多项式的特征多项式:

设 $h(x)$ 是任一复系数多项式, 则同样由性质2知, $h(A)$ 的特征多项式 $g(\lambda)$ 等于 $h(B)$ 的特征多项式, 而 $h(B)$ 是可以具体计算出来的, 故

$$g(\lambda) = |\lambda E - h(B)|$$

也可计算出来. 因此解法四可以解决同类型中最一般的问题(事实上, 用解法一、解法二也可以计算 A 的多项式的特征多项式, 但计算要麻烦一些).

参考文献

[1] 陈志杰等编, 高等代数与解析几何(下册), 北京: 高等教育出版社, 2001年

[2] 王萼芳, 石生明修订, 高等代数, 高等教育出版社, 北京: 2003年

注: 本文已刊登在《高等数学研究》2007年第1期上(p115-117).