Mathematica 用法简介(2)
——关于“形”的问题

本讲要点：

一、**Mathematica** 快速入门(2)---基本作图命令
二、与作图有关的问题
三、分形图及其绘制
四、作图练习
（1）普通图形作图练习
（2）分形图作图练习

一、Mathematica 快速入门(2)---基本作图命令

0. 基本的作图命令：

序号	作图命令	功能简介
1	Plot[...]	平面显函数作图
2	Plot3D[...]	空间显函数作图
3	ParametricPlot[...]	平面参数方程作图
4	ParametricPlot3D[...]	空间参数方程作图
5	ContourPlot[...]	等高线
6	DensityPlot[...]	等密度线
7	ListPlot[...]	散点图
8	Show[...]	（合并）显示图形

1. Plot[...]

```
Plot[Evaluate[Table[Sin[j*x],{j,5}]],{x,0,2Pi}]
```

2. Plot3D[...]

```
Plot3D[Sin[x]*Cos[y],{x,0,Pi},{y,-Pi,Pi}]
```

或

```
Plot3D[Sin[Sqrt[x^2+y^2]]/(Sqrt[x^2+y^2]),{x,-8,8},{y,-8,8},PlotPoints->60,
   PlotRange->{-0.2,1}]
```

3. ParametricPlot[...]

```
ParametricPlot[{5Cos[t],3Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```

4. ParametricPlot3D[...]

```
ParametricPlot3D[{Sin[u]Cos[v],Sin[u]Sin[v],Cos[u]},{u,0,Pi},{v,0,2Pi}]
```

或

```
ParametricPlot3D[{Sqrt[t]Cos[t],Sqrt[t]Sin[t],1/2t},{t,0,6Pi}]
```

5. ContourPlot[...]

```
ContourPlot[x^2+y^2-5(Sqrt[x^2+y^2]-y),{x,-10,10},{y,-10,7},
PlotPoints->300, Contours->{0}, ContourShading->False]
```

6. DensityPlot[...]

```
DensityPlot[Sin[x+y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi}]
```

7. ListPlot[...]

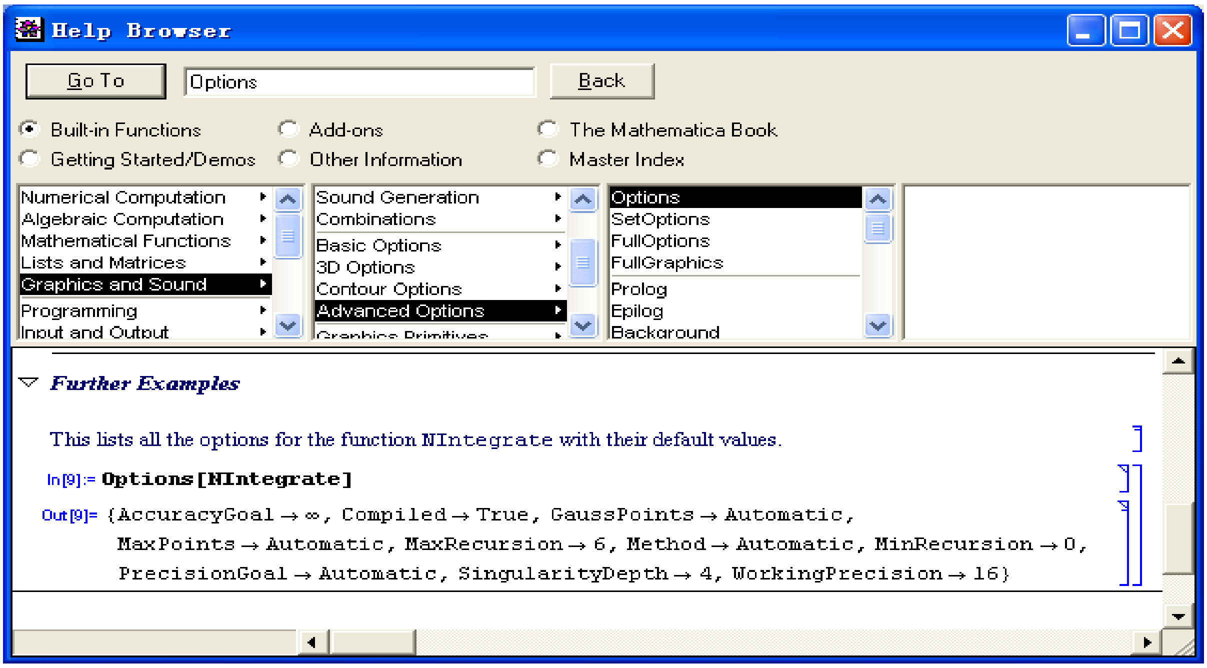
```
n=40;dots={};
For[i=2,i<=n, i++,
   For[j=1,j<i, j++,
      If[GCD[i,j]==1,AppendTo[dots,{j/i,1/i}]]]]
pp=ListPlot[dots,PlotRange->{0,0.6},
AxesLabel->{"x","R(x) "},AspectRatio->0.6]
```

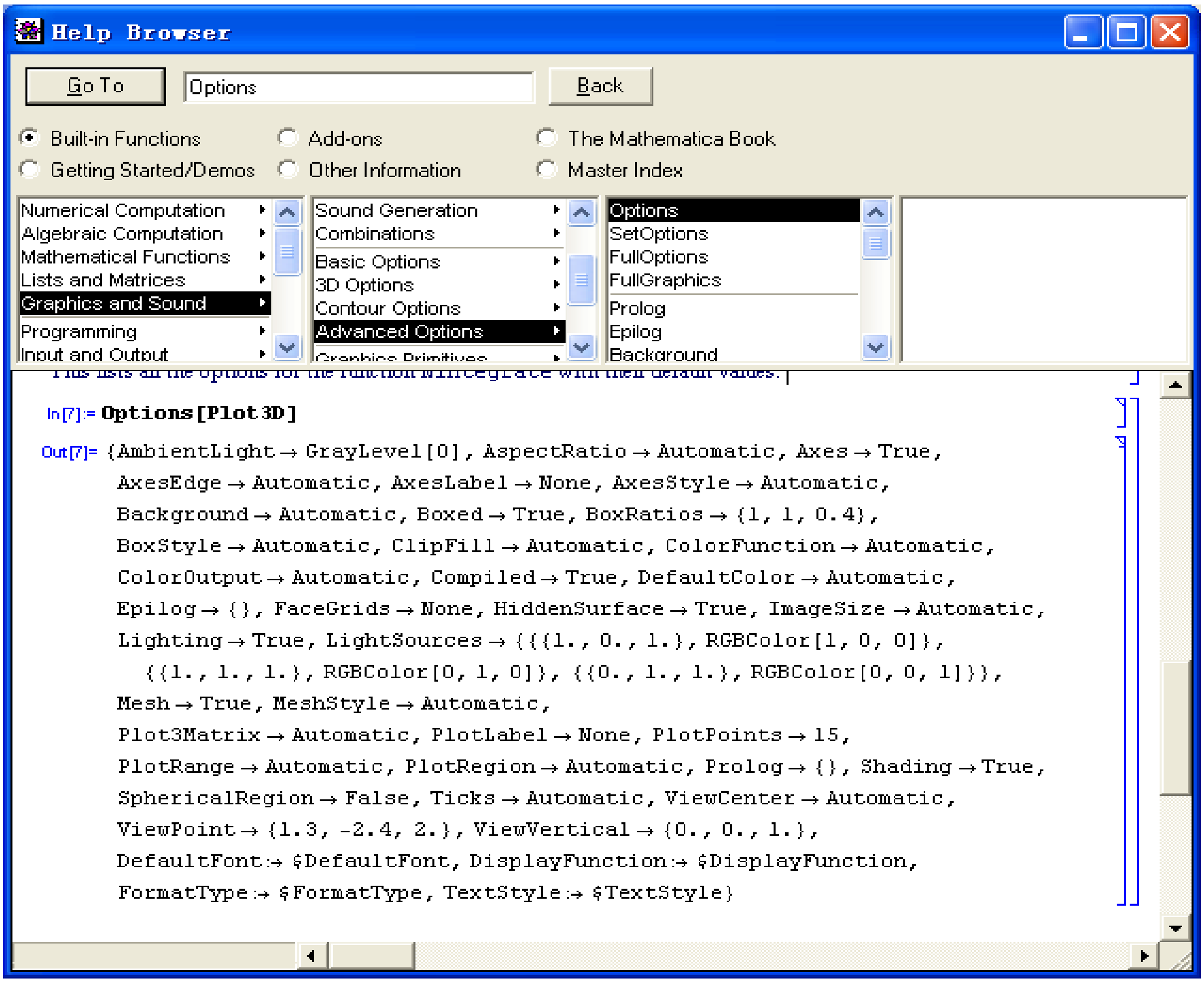
8. Show[...]

```
p1=Plot[x^3+3,{x,0,2}];
p2=Plot[x^3-3,{x,-2,0}];
Show[p1,p2]
```

二、与作图有关的问题

1. Options[…]





2. Griphics[…] 与 graphics primitives(图元):

序号	作图命令	说明
1	Point	点状
2	Line	线状
3	Rectangle	矩形
4	Cuboid	立柱形
5	Polygon	填充多边形
6	Circle	圆形
7	Disk	圆盘形
8	Raster	灰色矩形数组图形
9	RasterArray	彩色矩形数组图形

```
l2=Line[Table[{Random[ ],Random[ ]},{5}]];
Show[Graphics[l2]]
```

或

```
l5=Polygon[Table[{Random[ ],Random[ ]},{5}]];
Show[Graphics[{RGBColor[1,0,0],l5}]]
```

三、分形图及其绘制

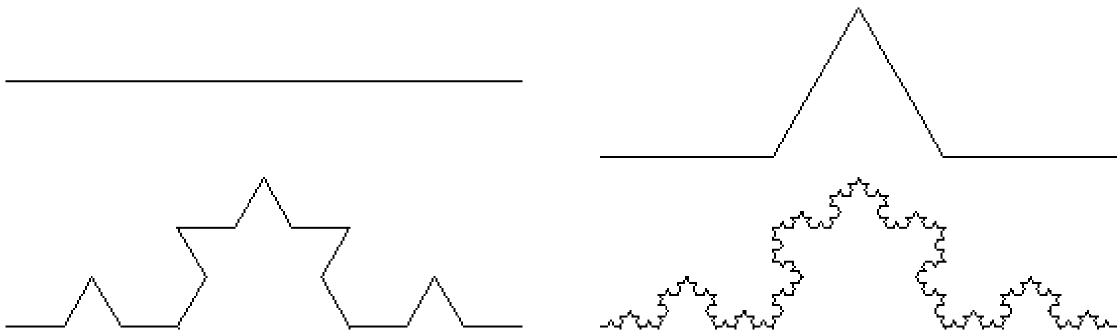
在我们生活的大千世界里，除了有象房屋建筑、公路桥梁、汽车、飞机、轮船以及各种劳动生活工具等这些人造的形态规则的几何形态之外，更广泛地充满了诸如花草树木、山川河流、烟雾云彩等形态极不规则的几何形态。大自然在向人们展示其美丽多变形态的同时，也提出了难以回答的询问:如何描述复杂的自然表象? 如何分析其内在的机理?科学家和艺术家一直在苦苦追寻着这些问题的答案,并力图从传统的欧几里得几何体系中解放出来。 最近几十年，一些学家开始朦胧的“感觉”到另一个几何世界的存在，这个几何世界描述的对象是自然界的几何形态。七十年代，美国科学家 B.Mandelbrot 用 Fractal (原意是碎片、分数等)这个词来定义这门新的几何学科——分形几何学。分形几何把自然形态看作是具有无限嵌套层次的精确结构，并且在不同尺度下保持相似的属性，于是在简单的迭代过程中就可以得到描述复杂的自然形态的有效方法。尽管分形的提出只有二十多年的时间，但它已经在自然科学的诸多领域如数学、物理、 化学、材料科学、生命科学、地质、 地理、天文、计算机乃至经济、社会、艺术等及其广泛的领域有着重大的应用。可以毫不夸张地说: “分形是大自然的几何学”， “分形处处可见”。

1. 生成元

早在上世纪末及本世纪初，一些科学家就构造出一些边界形状极不光滑的图形，由于这类图形长期以来被视为“不可名状的”或“病态的”，因而， 只有当人们需要反例时想到他们。这类图形的构造方式都是一个共同的特点，即最终图形 F 都是按照一定的规则 R 通过对初始图形 F 不断修改得到的。其中最具有代表性的图形是 Koch 曲线。

2. Koch 曲线及其构造方法

给定一条线段 F_0， 将该线段三等份，并将中间的一段用以该线段为边的等边三角形的另外两条边代替，得到图形 F_1。然后， 再对图形 F_1 中的每一小段都按照上述方式修改以致无穷。则最后得到的极限曲线，就是所谓的Koch曲线。



Koch曲线的修改规则 R 是将每一条线段F_0 用一条折线F_1代替，我们 称 F_1为该分形的生成元。 分形的基本特性完全由生成元决定。因此， 给定一个生成元， 我们就可以生成各种各样的分形图案。

实现 Koch 曲线的 Mathematica 程序为：

```
koch[ab_List] :=
    Block[{tmp = {}, i, pnum = Length[ab], alpha = 60Degree,
                                    sa = Sin[alpha], ca =
      Cos[alpha], c, d, e, T = {{ca, -sa}, {sa, ca}}},
           For[i = 1, i < pnum, i++,
                  c = ab[[i]]*2/3 + ab[[i + 1]]/3;
                  e = ab[[i]]/3 + ab[[i + 1]]*2/3;
                  d = c + T.(e - c) ;
                  tmp = Join[tmp, {ab[[i]], c, d, e, ab[[i + 1]]}]
            ];
        tmp
    ]
pt = {{0, 0}, {1, 0}};
Show[Graphics[Line[Nest[koch, pt, 4]], AspectRatio -> Sqrt[3]/6]]
```

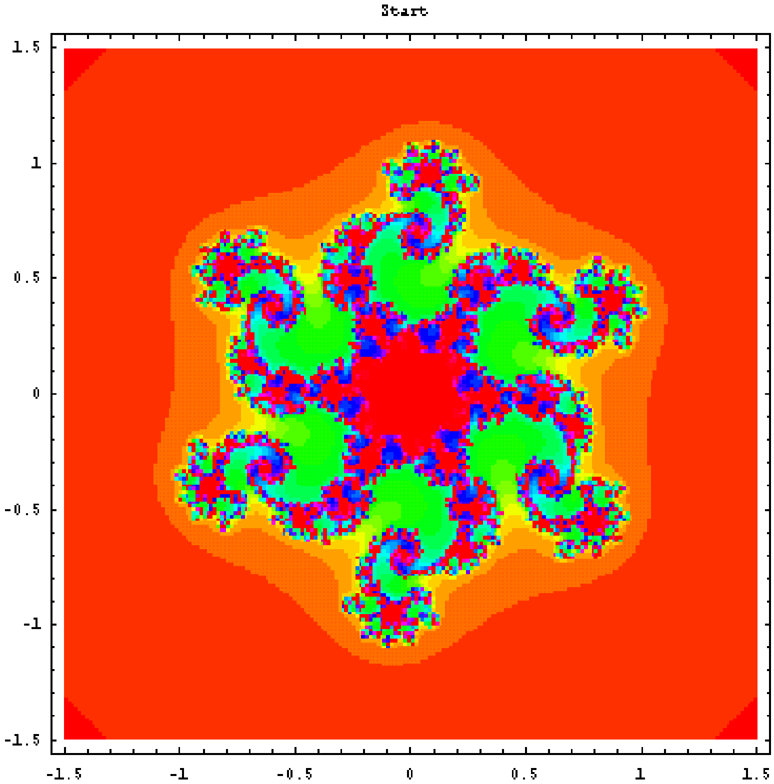
从一个正三角形出发，用 Kock 曲线的生成元作迭代得到的极限图形称为 Kock 雪花。Kock 雪花与 Kock 曲线一样，其边长也是无限长的，要解释这些奇特的性质就必

须了解分形学的基本知识。

实现 Kock 雪花的 Mathematica 程序类似于 newlect04-Mathematica1.nb

3. 利用复函数的迭代制作的分形图

早在上个世纪就有一些数学家对复变函数的迭代进行研究，然而直到 20 世纪 80 年代，B.Mandelbrot 才将复变函数的迭代与分形联系起来，并绘制出了第一张以他的名字命名的引人入胜的分形图形，复变函数的迭代由此再一次成为数学家的热点研究问题。



实现"复函数的迭代制作的分形图"的 Mathematica 程序为：newlect04-Mathematica2.nb

四、作图练习

（1）普通图形作图练习

1. 在 0 点分别用 3，6，9 阶 Taylor 级数展开函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$，并在一张图上绘制出原函数及各展开图像（$x\in[-\pi,\pi]$）;

2. 用一条语句在一张图上绘制函数 $y=x^n$，$n=1,2,3,4,5,6$ 的图形;

3. 画出参数曲线：

   1). x=sin(3t), y=sin(5t), t∈[0,π]

   2). x=a cos(1+cos(t)), y=a sin(1+cos(t)), a 任意取值，t∈[0,π]

3）x=cos(t)+5cos(3t)，y=6cos(t)-5cos(3t)；

4. 用命令给出前 30 个素数，并用平面折线连接加以示意；

5. 用命令给出斐波那契数列的前 10 项，并画出其平面散点图；

6. 用命令给出数列$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{2^3}\right)\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$的前 100 项，画出平面散点图并估计其极限值；

7. 作出函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，$x\in[-10,10]$的图象；

8. 选择合适的作图区间，作出函数 $y=\sin x+\frac{1}{100}\cos(100x)$ 的图象；

9. 作出圆环面$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$，$R=6$，$r=2$ 的图象；
提示：圆环面的参数方程为：

$$\begin{cases} x=(R+r\cos u)\cos v \\ y=(R+r\cos u)\sin v \\ z=r\sin u, \end{cases} \qquad u\in[0,2\pi],\ v\in[0,2\pi]$$

10. 作出圆环面$(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2=r^2$，$R=6$，$r=2$ 在第一卦象部分的图象；

11. 作隐函数$(x^2+y^2)^2=x^3-y^3$的图象；

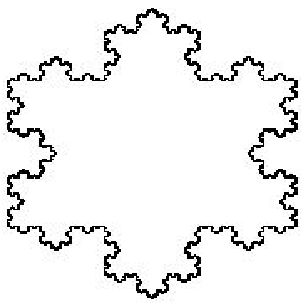
12. 求方程 $x^2=\sin x$ 的最小正实根；

13. 求方程 $2x=\mathrm{tg}x$ 的最大负实根；

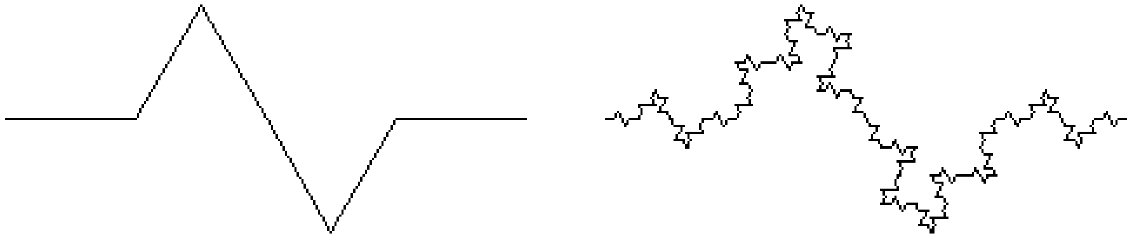
14. 作椭球面在第四卦象部分（$x>0$，$y<0$，$z>0$）的图象。

（2）分形图作图练习

1．实现 Kock 雪花：



2．制作如下的分形图：（参见：**newlect04-Mathematica3.nb**）



3．制作如下的分形图：（参见：**newlect04-Mathematica4.nb**）