1. 对不可压缩 Euler 方程组推导速度场旋度应满足的方程.

$$\begin{cases} u_t + (u\cdot\nabla)u + \nabla p = 0 & (1)\\ \nabla\cdot u = 0 & (2)\end{cases}$$

$u=u(x,t)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in\mathbb{R}^n$, $t\geq 0$, $p(x,t)\in\mathbb{R}$.

$w=\nabla\times u$.

① $n=2$: $w=\partial_1 u_2-\partial_2 u_1$:

$$w_t+(u\cdot\nabla)w=0 \qquad (4)$$

② $n=3$.

$$w_t+(u\cdot\nabla)w-(w\cdot\nabla)u=0 \qquad (3)$$

注: $(u\cdot\nabla)u=\sum_{i=1}^{3}u_i\partial_i u=\left(\sum_{i=1}^{3}u_i\partial_i u_1,\ \sum_{i=1}^{3}u_i\partial_i u_2,\ \sum_{i=1}^{3}u_i\partial_i u_3\right)^T$.

解. 利用矢量公式

$$\boxed{(u\cdot\nabla)u=\frac{1}{2}\nabla(u^2)-u\times(\nabla\times u).}\quad (\text{其中 } u^2=u\cdot u=|u|^2)$$

则(1)写为

$$\partial_t u+\frac{1}{2}\nabla(u^2)-u\times w+\nabla p=0.$$

两边取旋度,则 $\partial_t w-\nabla\times(u\times w)=0$ (利用 $\nabla\times\nabla(\frac{1}{2}u^2+p)=0$).

再利用矢量公式 $\boxed{\nabla\times(u\times w)=u(\nabla\cdot w)-w(\nabla\cdot u)+(w\cdot\nabla)u-(u\cdot\nabla)w}$,

由(2)式,其中 $\nabla\cdot u=0$,再由矢量公式 $\boxed{\nabla\cdot(\nabla\times u)=0}$,得

$$\partial_t w+(u\cdot\nabla)w-(w\cdot\nabla)u=0.$$

此即(3)式.

对 $n=2$ 时 $w=(0,\ 0,\ \partial_1 u_2-\partial_2 u_1)^T$, $u=(u_1,\ u_2,\ 0)$. 从而由于 w、u 只依赖于 x^1, x^2 变量,

$$(w\cdot\nabla)u=(\partial_1 u_2-\partial_2 u_1)\partial_3\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\0\end{pmatrix}=0.$$

从而得(4)式. □

注 上述矢量公式

2. 设 $u(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，$v(x,y,z)=x+y+z$，计算

$$\iint_\Sigma (\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,dS,$$

其中 Σ 为上半球面：$x^2+y^2+z^2=1$，$z\geq 0$；$\vec{n}$ 为 Σ 外单位法向量。

解(一). $\nabla u=(2x,\ 2y,\ 2z)$，$\nabla v=(1,\ 1,\ 1)$.

$$\nabla u\times\nabla v=(2y-2z,\ 2z-2x,\ 2x-2y),\quad \mathrm{div}(\nabla u\times\nabla v)=0$$

又 $\vec{n}=(x,y,z)$，从而

$$(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}=\left((2y-2z)x\right)+\left((2z-2x)y\right)+(2x-2y)z$$
$$=2xy-2zx+2zy-2xy+2xz-2yz=0.$$

于是

$$\iint_\Sigma(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,dS=0$$

□

注：要写清楚向量间到底是什么运算。写成 $(\nabla u\times\nabla v)n$ 都是不对的。

解(二). 如果要利用 Gauss 定理：

$$\int_{\partial M} u\cdot\vec{n}\,dS=\int_M(\mathrm{div}\,u)\,d\Omega$$

其中 ∂M 必须为闭曲面。从而在本题中要加上 $\Sigma_0:=\{x^2+y^2\leq 1,\ z=0\}$. 则

$$\iint_\Sigma(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,dS=\iint_{\Sigma\cup\Sigma_0}(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,dS-\iint_{\Sigma_0}(\nabla u\times\nabla v)\cdot\vec{n}\,dS$$

$$=\iiint_{B^+}\mathrm{div}(\nabla u\times\nabla v)\,d\Omega-\iint_{\Sigma_0}(\nabla u\times\nabla v)\cdot(0,0,-1)\,dS$$

$$=\iint_{\substack{\Sigma_0:\\ x^2+y^2\leq 1}}(2x-2y)\,dx\,dy=0$$ （利用 $2x-2y$ 为奇函数，且 Σ_0 关于原点对称）.

□.