关于极分解的一些新结果*

王卫国　刘新国†
(中国海洋大学数学系, 山东青岛, 266071)

摘 要

本文研究极分解和广义极分解. 孙和陈提出的 Frobenius 范数下的逼近定理被推广至任何酉不变范数情形. 得到了次酉极因子的一个新的表达式. 通过新的表达式, 我们得到了次酉极因子在任何酉不变范数下的扰动界. 最后, 讨论了数值计算方法.

1 引言

若 $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 有分解 $A = UH$, 其中 $U \in \mathbb{C}^{m\times n}$ 是列正交矩阵, $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 是 Hermite 半正定矩阵, 则这一分解叫做 A 的极分解. Autonne 在 1902 年首先研究了极分解, 关于极分解的最佳逼近性质, 扰动界限和算法已有很多讨论, 见 [1, 2, 4].

一般而言, 矩阵的广义极分解不唯一. 有学者给出了唯一性条件和一个等价表述, 同时给出了广义极分解的一些性质、扰动界和求次酉极因子的迭代算法.

2 主要结果

由于 $m \times n$ 列规范正交阵必为次酉矩阵, 因此极分解必为广义极分解. 然而这种推广使得广义极分解有很大的不唯一性考虑.

考虑 $A \in \mathbb{C}_r^{m\times n}$ 的奇异值分解 (SVD)

$$A = U \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} V^H, \tag{2.1}$$

*请用学校的电子邮箱将 tex 源文件作为附件发送到 `wfy@math.ecnu.edu.cn`, 邮件主题为 “学号-姓名”, 文件名取为: hw03.tex. 本次作业的截止日期为 2011.4.10

†本文受 863 课题部分资助.

其中 $U=[U_1,U_2,U_3]\in\mathbb{C}^{m\times m}$, $V=[V_1,V_2]\in\mathbb{C}^{n\times n}$ 是酉矩阵, $U_1\in\mathbb{C}^{m\times r}$, $V_1\in\mathbb{C}^{n\times r}$, $U_2\in\mathbb{C}^{m\times(n-r)}$, $\Sigma_1=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_r)$, $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_r\ge 0$.

A 的极分解为 $A=QH$, 其中 $H=(A^HA)^{1/2}$. 但当 $r<n$ 时, 因子 Q 是不唯一的. 后面的引理将给出 Q 的一般表达式. 当 $r=n$ 时, A 的广义极分解与极分解相同, 因而不必独立讨论. 而当 $r<n$ 时, 广义极分解远比极分解复杂.

2.1 广义极分解的唯一性

可以如下产生 A 的一个广义极分解

$$A=Q_GH,\quad \text{其中 } Q_G=U_1V_1^H,\ H=V_1\Sigma_1V_1^H. \tag{2.2}$$

对于非零矩阵 $A\in\mathbb{C}^{m\times n}$, 则在

$$R(Q^H)=R(H) \tag{2.3}$$

的限制下, A 的广义极因子 Q, H 唯一确定. 本文所指的广义极分解总指由 (2.2) 确定的分解.

这里要指出, 次酉极因子 Q_G 与极因子 Q 有很大区别.

参考文献

[1] A. Ben-Israel and T. N. E. Grevile, *Generalized Inverse: Theory and applications*, John Wiley, New York, 1974.

[2] 陈小山, 黎稳, *酉不变范数下极分解的扰动界*, 计算数学, 2005, 27:112–128.

[3] K. Fan and A. J. Hoffman, *Some metric inequalities in the space of matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6:111–116.

[4] N. J. Higham, *Computing the polar decomposition with applications*, SIAM J. Sci. Statist. Comput., 1986, 7:1160–1174.