数学软件 Matlab

—— 多项式运算

—— 代数方程求解

内容提要

多项式运算

- 多项式转化为符号表达式：poly2sym
- 四则运算：conv、deconv
- 导数与积分：ployder、polyint
- 求值与零点：polyval、polyvalm、roots、poly

代数方程求解

- 线性方程组数值求解：linsolve
- 非线性方程数值求解：fzero
- 非线性方程符号求解：solve

多项式表示方法

- **Matlab 中多项式的表示方法**
  - 在 Matlab 中，n 次多项式用一个长度为 n+1的向量来表示

$$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

在 Matlab中表示为向量：$[a_n, a_{n-1}, \ \cdots\ , a_1, a_0]$

例： $2x^3 - x^2 + 3 \longleftrightarrow [2, -1, 0, 3]$

注：系数中的零不能省！

  - 多项式与符号表达式的互化：poly2sym, sym2poly

例：

```
poly2sym([2,-1,0,3])
```

多项式加减

- 多项式加减运算

  - Matlab 没有提供专门进行多项式加减运算的函数
  - 多项式的加减就是其所对应的系数向量的加减运算

  - 次数相同的多项式，可直接对其系数向量进行加减运算
  - 如果两个多项式次数不同，则应该把低次多项式中系数不足的高次项用 0 补足，然后再进行加减运算

例：

$p_1 = 2x^3 - x^2 + 3$ → [2, -1, 0, 3]

$p_2 = 2x + 1$ → [0, 0, 2, 1]

$p_1 + p_2 = 2x^3 - x^2 + 2x + 4$ ← [2, -1, 2, 4]

多项式乘除

- 多项式乘法运算：

```
k=conv(p,q)
```

例：计算多项式 $2x^3 - x^2 + 3$ 和 $2x + 1$ 的乘积

```
p=[2,-1,0,3];
q=[2,1];
k=conv(p,q)
```

- 多项式除法运算：

```
[k,r]=deconv(p,q)
```

  - 其中 k 返回的是多项式 p 除以 q 的商，r 是余式

```
[k,r]=deconv(p,q)
```

⟺

```
p=conv(q,k)+r
```

多项式求导

- 多项式求导： polyder

k=polyder(p)	多项式 p 的导数
k=polyder(p,q)	p*q 的导数
[k,d]=polyder(p,q)	p/q 的导数，k 是分子，d 是分母

例：已知 $p_1(x)=2x^3-x^2+3$，$p_2(x)=2x+1$

求：p_1'，$(p_1p_2)'$，$(p_1/p_2)'$

```
k1=polyder([2,-1,0,3]);
k2=polyder([2,-1,0,3],[2,1]);
[k3,d]=polyder([2,-1,0,3],[2,1]);
```

多项式积分

- 多项式积分： polyint

I=polyint(p,c)	不定积分，常数项取 c
I=polyint(p)	不定积分，常数项取 0

例：已知 $p(x) = 2x^3 - x^2 + 3$

求 $\int p(x)\,\mathrm{d}x$ ，常数项取 5

```
I=polyint([2,-1,0,3],5);
```

多项式求值

- 多项式求值： polyval

y=polyval(p,x)	计算多项式 p 在 x 点的值

  - 这里的 x 可以是向量或矩阵，此时采用的是数组运算！

例： 已知 $p(x) = 2x^3 - x^2 + 3$，计算 p 在 x 和 y 的每个分量上的值，其中 x=2，y=[-1,2; -2,1]

```
p=[2,-1,0,3];
x=2;
y=[-1, 2; -2,1];
z1=polyval(p,x)
z2=polyval(p,y)
```

矩阵多项式求值

- 矩阵多项式求值： polyvalm

Y=polyvalm(p,A)	计算多项式 p 作用在矩阵 A 上的值

  - 这里的 A 必须是方阵，采用的是普通矩阵运算！

例：已知 $p(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ ，则

```
polyvalm(p,A)=2*A*A*A - A*A + 3*eye(size(A))
polyval(p,A) = 2*A.*A.*A - A.*A + 3*ones(size(A))
```

```
p=[1,0,0];  % p(x)=x^2
x=[1, 2; 3, 4];
y1=polyval(p,x)
y2=polyvalm(p,x)
```

多项式的零点

- 多项式的零点： roots

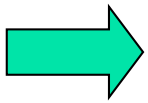
x=roots(p)	计算多项式 p 的所有零点

- 这里的 x 是由 p 的所有零点组成的向量

例：已知 $p(x) = 2x^3 - x^2 + 3$，求 $p(x)$ 的零点

```
p=[2,-1,0,3];
x=roots(p)
```

- 若已知多项式的全部零点，则可用 poly 函数给出该多项式

p=poly(x)  $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$

多项式运算小结

```
    k=conv(p,q)
[k,r]=deconv(p,q)
```

```
    k=polyder(p)
    k=polyder(p,q)
[k,d]=polyder(p,q)
```

```
  I=polyint(p,c)
  I=polyint(p)
```

```
  y=polyval(p,x)
  Y=polyvalm(p,A)
```

```
  x=roots(p)
```

多项式运算中，
使用的是多项式

系数向量，

不涉及符号计算！

```
poly2sym(p), sym2poly(f), poly(x)
```

内容提要

多项式运算

- 多项式转化为符号表达式：poly2sym，sym2poly
- 四则运算：conv、deconv
- 导数与积分：ployder、polyint
- 求值与零点：polyval、polyvalm、roots、poly

代数方程求解

- 线性方程组数值求解：linsolve
- 非线性方程数值求解：fzero
- 非线性方程符号求解：solve

线性方程组求解

- 线性方程组求解： `linsolve`

`x=linsolve(A,b)`	解线性方程组 $Ax = b$

例：解方程组

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + z = 3 \\ x + 3y = 8 \end{cases}$$

```
A=[1 2 -1; 1 0 1; 1 3 0];
b=[2; 3; 8];
x=linsolve(A,b)
```

- 注意：这里的右端项 b 必须是列向量！

非线性方程求解

- 非线性方程求解： `fzero`

`x=fzero(f,x0)`	求方程 $f(x)=0$ 在 x_0 附近的一个解
`x=fzero(f,[a,b])`	找出区间 `[a,b]` 内的一个解

- 方程可能有多个根，但 `fzero` 只给出 `x0` 附近的一个
- `x0` 是一个标量，为参考点，不能缺省
- `fzero` 先找出一个包含 `x0` 的区间，使得 `f` 在这个区间的两个端点上的函数值异号，然后再在这个区间内寻找方程 `f(x)=0` 的解；如果找不到这样的区间，则返回 `NaN`
- 由于 `fzero` 是根据函数是否穿越横轴来决定零点，因此它无法确定函数曲线仅触及横轴但不穿越的零点，如 |sin(x)|
- `f(x)=0` 在 `[a,b]` 内可能有多个解，但 `fzero` 只给出一个

非线性方程求解

- 非线性方程求解： `fzero`

`x=fzero(f,x0)`	求方程 $f(x)=0$ 在 x_0 附近的一个解
`x=fzero(f,[a,b])`	找出区间 `[a,b]` 内的一个解

- 参数 `f` 是一个函数句柄，可通过以下方式给出
  - 匿名函数，如：`f=@(x) x^3-3*x+1`
  - 函数文件（略）

注意：`f` 不是方程！也不能使用符号表达式！

fzero 举例

例： 求 $f(x)=x^3-3x+1$ 在区间 [-2, 0] 内的实根。

```
f=@(x) x^3-3*x+1;
x0=fzero(f,[-2,0])
```

例： 求 $f(x)=\sin(x)$ 在 10 附近的实根。

```
fzero(@sin,10)
```

用 fzero 求零点时可以先通过作图确定零点的大致范围

代数方程符号求解

- 代数方程符号求解： solve

s=solve(f,v)	关于指定自变量求解
s=solve(f)	关于默认变量求解

- 参数 f 是一个符号表达式
- 也可以是用等号 == 连接的方程（Matlab新版本）

例：解方程 $x^3 - 3x + 1 = 0$

```
syms x;  f=x^3-3*x+1;
sol=solve(f,x)      % 或 s=solve(f)
```

```
syms x;
sol=solve(x^3-3*x+1==0,x) % MatlabR2012版本
```

代数方程符号求解

- solve 也可以用来解方程组

```
solve(f1,f2, ...,fN, v1,v2, ...,vN)
```

- 求由 $f_1, f_2, \cdots, f_N$ 确定的方程组关于 $v_1, v_2, \cdots, v_N$ 的解

例： 解方程组

$$\begin{cases} x+2y-z=27 \\ x+z=3 \\ x^2+3y^2=28 \end{cases}$$

```
syms x y z;
[s1,s2,s3]= ...
   solve(x+2*y-z-27, x+z-3, x^2+3*y^2-28, x,y,z)
```

- 注意输出变量的对应顺序！
- 如果得不到解析解， solve 会给出数值解

求解方程函数小结

roots(p)：多项式的所有零点，p 是多项式系数向量

fzero(f,x0)：求 f(x)=0 在 x0 附近的一个根，f 是函数句柄，可以通过匿名函数或函数文件来定义，但不能是方程或符号表达式！

linsolve(A,b)：解线性方程组

solve(f,v)：求方程关于指定自变量的解，f 是符号表达式或符号方程；

- solve 也可解方程组 (包含非线性)
- 得不到解析解时，给出数值解

上机作业

1、已知多项式 $p(x)=6x^4-5x^2+x,\ q(x)=6x^3-1$

计算 $p(x)+q(x),\ p(x)q(x),\ \dfrac{p(x)}{q(x)}$ 及它们的导数

(将所用命令写入文件 m61.m)

2、已知多项式 $p(x)=816x^3-3835x^2+6000x-3125$

(a) 求出 $p(x)$ 的所有零点；

(b) 用 fzero 计算 $p(x)$ 的第二大零点

(将所用命令写入文件 m62.m)

3、求方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2-y=1 \end{cases}$ 的解

(将所用命令写入文件 m63.m)

上机作业

4、已知 Chebyshev 多项式定义如下：

$$T_0(x)=1,\quad T_1(x)=x,$$

$$T_{n+1}(x)=2x\,T_n(x)-T_{n-1}(x),\quad n=1,2,\ldots$$

试编程计算 $T_{20}(x)$ 的导数（注：$T_n(x)$ 为 n 阶多项式）

(将程序取名为 m64.m)

(注：要求利用多项式运算，不要使用符号计算！)

5、编写一个函数文件： m65.m，实现两个向量的加运算
（ 在长度较短的向量前面添 0，使得两个向量长度相等）

上机要求

❑ 上机要求

- 将所有文件作为附件，通过 foxmail 以邮件形式发给 mhjs@system.mail
- 邮件主题为：机号-学号-姓名，其中机号为 两位数
- 三个字段之间用英文状态下的减号连接
- 每个 M 文件的第一行添加一条注解语句:

  % 机号-学号-姓名