第六讲 函数插值

目录

6-6 三次样条插值

6.6 三次样条插值

为什么三次样条函数插值

为了增加分段插值函数的 **光滑性**, 我们可以采用 **样条函数** 进行插值.

比如目前常用的三次样条函数, 它具有二阶连续导数.

6-6-1 三次样条函数

定义 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，已知 $f(x)$ 在这些节点上的函数值为 $f(x_k) = f_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$. 求插值函数 $S(x)$ 满足

(1) $S(x) \in C^2[a, b]$, 即二阶连续可导;

(2) $S(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n$;

(3) $S(x)$ 是分段三次函数, 即在每个小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上是三次多项式.

这就是三次样条插值, $S(x)$ 就称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的三次样条插值函数.

三次样条函数

定义 (三次样条函数) 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，若函数 $S(x) \in C^2[a, b]$，且在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式，则称其为三次样条函数.

三次样条函数

定义 (三次样条函数) 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点，若函数 $S(x) \in C^2[a, b]$，且在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式，则称其为三次样条函数.

将 $S(x)$ 在小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式记为 $s_k(x)$，即

$$S(x) = s_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $s_k(x)$ 是三次多项式，且满足 $\boxed{s_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \quad s_k(x_k) = f_k}$.

三次样条函数

定义 (三次样条函数) 设 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 为 $[a, b]$ 上的互异节点, 若函数 $S(x) \in C^2[a, b]$, 且在每个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上是三次多项式, 则称其为三次样条函数.

将 $S(x)$ 在小区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式记为 $s_k(x)$, 即

$$S(x) = s_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

其中 $s_k(x)$ 是三次多项式, 且满足 $\boxed{s_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, \quad s_k(x_k) = f_k}$. 于是

$$S(x) = \begin{cases} s_1(x), & x \in [x_0, x_1] \\ s_2(x), & x \in [x_1, x_2] \\ \quad \vdots & \\ s_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases}$$

$s_k(x)$ 的表达式

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以 $S'(x_k^-) = S'(x_k^+)$, $S''(x_k^-) = S''(x_k^+)$, 即

$$\boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+), \quad s_k''(x_k^-) = s_{k+1}''(x_k^+), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1}$$

$s_k(x)$ 的表达式

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以 $S'(x_k^-) = S'(x_k^+)$, $S''(x_k^-) = S''(x_k^+)$, 即

$$\boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+), \quad s_k''(x_k^-) = s_{k+1}''(x_k^+), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1}$$

- 每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式, 有 4 个待定系数, 所以共有 $4n$ 个待定系数, 故需 $4n$ 个方程.

$s_k(x)$ 的表达式

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以 $S'(x_k^-) = S'(x_k^+)$, $S''(x_k^-) = S''(x_k^+)$, 即

$$\boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+), \quad s_k''(x_k^-) = s_{k+1}''(x_k^+), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1}$$

- 每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式, 有 4 个待定系数, 所以共有 $4n$ 个待定系数, 故需 $4n$ 个方程.
- 由前面的插值条件可得 $2n + 2(n-1) = 4n - 2$ 个方程, 还缺 2 个方程!

$s_k(x)$ 的表达式

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以 $S'(x_k^-) = S'(x_k^+)$, $S''(x_k^-) = S''(x_k^+)$, 即

$$\boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+), \quad s_k''(x_k^-) = s_{k+1}''(x_k^+), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1}$$

- 每个 $s_k(x)$ 均为三次多项式, 有 4 个待定系数, 所以共有 $4n$ 个待定系数, 故需 $4n$ 个方程.
- 由前面的插值条件可得 $2n + 2(n-1) = 4n - 2$ 个方程, 还缺 2 个方程!

边界条件

实际问题中, 通常会对样条函数 $S(x)$ 在两个端点 $x = a$ 和 $x = b$ 处的状态有一定的要求, 这就是**边界条件**.

6-6-2 边界条件

三类常用的边界条件

(1) **第一类边界条件**: 指定函数在两端点处的一阶导数, 即

$$S'(x_0) = f_0', \quad S'(x_n) = f_n'$$

(2) **第二类边界条件**: 指定函数在端点处的二阶导数, 即

$$S''(x_0) = f_0'', \quad S''(x_n) = f_n''.$$

如果 $f_0'' = f_n'' = 0$, 则称为**自然边界条件**, 此时 $S(x)$ 称为**自然样条函数**.

(3) **第三类边界条件**: 假定 $f(x)$ 是以 $x_n - x_0$ 为周期的周期函数, 于是要求 $S(x)$ 也是周期函数

$$S(x_0) = S(x_n), \quad S'(x_0^+) = S'(x_n^-), \quad S''(x_0^+) = S''(x_n^-).$$

此时 $S(x)$ 称为**周期样条函数**.

6-6-3 三次样条函数

由于 $S(x)$ 二阶可导, 所以可设

$$S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

下面我们用 M_k 来表示 $S(x)$.

6-6-3 三次样条函数

由于 $S(x)$ 二阶可导, 所以可设

$$S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

下面我们用 M_k 来表示 $S(x)$. 考虑 $S(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式 $s_k(x)$, 满足

$$s_k''(x_{k-1}) = M_{k-1}, \quad s_k''(x_k) = M_k.$$

6-6-3 三次样条函数

由于 $S(x)$ 二阶可导, 所以可设

$$S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

下面我们用 M_k 来表示 $S(x)$. 考虑 $S(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式 $s_k(x)$, 满足

$$s_k''(x_{k-1}) = M_{k-1}, \quad s_k''(x_k) = M_k.$$

由于 $s_k(x)$ 是三次多项式, 故 $s_k''(x)$ 为线性函数, 由线性插值公式可知

$$s_k''(x) = \frac{x_k - x}{h_k} M_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{h_k} M_k,$$

其中 $h_k = x_k - x_{k-1}$.

6-6-3 三次样条函数

由于 $S(x)$ 二阶可导, 所以可设

$$S''(x_k) = M_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

下面我们用 M_k 来表示 $S(x)$. 考虑 $S(x)$ 在区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的表达式 $s_k(x)$, 满足

$$s_k''(x_{k-1}) = M_{k-1}, \quad s_k''(x_k) = M_k.$$

由于 $s_k(x)$ 是三次多项式, 故 $s_k''(x)$ 为线性函数, 由线性插值公式可知

$$s_k''(x) = \frac{x_k - x}{h_k} M_{k-1} + \frac{x - x_{k-1}}{h_k} M_k,$$

其中 $h_k = x_k - x_{k-1}$. 两边在 $[x_{k-1}, x_k]$ 上积分两次后可得

$$\boxed{s_k(x) = \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} M_{k-1} + \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} M_k + c_1 x + c_2,}$$

$(c_1, c_2$ 为积分常数, 待定$)$

三次样条函数的计算

将 $s_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, s_k(x_k) = f_k$ 代入后可得

$$c_1 = \frac{1}{h_k}(f_k - f_{k-1}) - \frac{h_k}{6}(M_k - M_{k-1}) = \frac{1}{h_k}\left[\left(f_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right) - \left(f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6}\right)\right],$$

$$c_2 = f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6} - c_1 x_{k-1} = \frac{x_k}{h_k}\left(f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6}\right) - \frac{x_{k-1}}{h_k}\left(f_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right).$$

三次样条函数的计算

将 $s_k(x_{k-1}) = f_{k-1}, s_k(x_k) = f_k$ 代入后可得

$$c_1 = \frac{1}{h_k}(f_k - f_{k-1}) - \frac{h_k}{6}(M_k - M_{k-1}) = \frac{1}{h_k}\left[\left(f_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right) - \left(f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6}\right)\right],$$

$$c_2 = f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6} - c_1 x_{k-1} = \frac{x_k}{h_k}\left(f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6}\right) - \frac{x_{k-1}}{h_k}\left(f_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right).$$

所以

$$\boxed{\begin{aligned} s_k(x) = {} & \frac{(x_k - x)^3}{6h_k} M_{k-1} + \frac{(x - x_{k-1})^3}{6h_k} M_k \\ & + \frac{x_k - x}{h_k}\left(f_{k-1} - \frac{M_{k-1} h_k^2}{6}\right) + \frac{x - x_{k-1}}{h_k}\left(f_k - \frac{M_k h_k^2}{6}\right). \end{aligned}}$$

即 $s_k(x)$ 可表示成 $x_k - x$ 和 $x - x_{k-1}$ 的奇次项的线性组合.

三次样条函数的计算 (续)

将 $x_k = x_{k-1} + h_k$ 代入, 整理后可得

$$
\begin{aligned}
s_k(x) = {} & \frac{M_k - M_{k-1}}{6h_k}(x - x_{k-1})^3 + \frac{M_{k-1}}{2}(x - x_{k-1})^2 \\
& + \left(\frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} - \frac{h_k(M_k + 2M_{k-1})}{6}\right)(x - x_{k-1}) + f_{k-1}.
\end{aligned}
$$

三次样条函数的计算 (续)

将 $x_k = x_{k-1} + h_k$ 代入, 整理后可得

$$s_k(x) = \frac{M_k - M_{k-1}}{6h_k}(x - x_{k-1})^3 + \frac{M_{k-1}}{2}(x - x_{k-1})^2 + \left(\frac{f_k - f_{k-1}}{h_k} - \frac{h_k(M_k + 2M_{k-1})}{6}\right)(x - x_{k-1}) + f_{k-1}.$$

现在, 问题转化为如何确定 $M_0, M_1, \ldots, M_n$ 的值?

M_k 的计算

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以在节点处的一阶导数存在, 故

$$S'(x_k^-) = S'(x_k^+), \quad \text{即} \quad \boxed{s'_k(x_k^-) = s'_{k+1}(x_k^+)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

M_k 的计算

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以在节点处的一阶导数存在, 故

$$S'(x_k^-) = S'(x_k^+), \quad \text{即} \quad \boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+)}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

所以可得方程

$$\frac{h_k}{6} M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3} M_k + \frac{h_{k+1}}{6} M_{k+1} = \frac{f_{k+1} - f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k}.$$

M_k 的计算

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以在节点处的一阶导数存在, 故

$$S'(x_k^-) = S'(x_k^+), \quad \text{即} \quad \boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

所以可得方程

$$\frac{h_k}{6} M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3} M_k + \frac{h_{k+1}}{6} M_{k+1} = \frac{f_{k+1} - f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k}.$$

两边除以 $\dfrac{h_k + h_{k+1}}{6}$, 上述方程改写为

$$\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

其中 $\mu_k = \dfrac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$, $\lambda_k = 1 - \mu_k$, $d_k = \dfrac{6(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])}{h_k + h_{k+1}} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$.

M_k 的计算

由于 $S(x) \in C^2[a,b]$, 所以在节点处的一阶导数存在, 故

$$S'(x_k^-) = S'(x_k^+), \quad \text{即} \quad \boxed{s_k'(x_k^-) = s_{k+1}'(x_k^+)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

所以可得方程

$$\frac{h_k}{6} M_{k-1} + \frac{h_k + h_{k+1}}{3} M_k + \frac{h_{k+1}}{6} M_{k+1} = \frac{f_{k+1} - f_k}{h_{k+1}} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_k}.$$

两边除以 $\dfrac{h_k + h_{k+1}}{6}$, 上述方程改写为

$$\boxed{\mu_k M_{k-1} + 2M_k + \lambda_k M_{k+1} = d_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.}$$

其中 $\mu_k = \dfrac{h_k}{h_k + h_{k+1}}$, $\lambda_k = 1 - \mu_k$, $d_k = \dfrac{6(f[x_k, x_{k+1}] - f[x_{k-1}, x_k])}{h_k + h_{k+1}} = 6f[x_{k-1}, x_k, x_{k+1}]$.

- $n+1$ 个变量, 但只有 $n-1$ 个方程, 需要通过边界条件增加两个方程.

(1) 第一类边界条件: 指定两端点处的一阶导数

$$\boxed{S'(x_0) = f'_0, \quad S'(x_n) = f'_n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{s'_1(x_0^+) = f'_0, \quad s'_n(x_n^-) = f'_n}$$

(1) 第一类边界条件: 指定两端点处的一阶导数

$$\boxed{S'(x_0) = f'_0, \quad S'(x_n) = f'_n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{s'_1(x_0^+) = f'_0, \quad s'_n(x_n^-) = f'_n}$$

可得: $\boxed{2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}(f[x_0, x_1] - f'_0), \quad M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_n}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n])}.$

(1) 第一类边界条件: 指定两端点处的一阶导数

$$\boxed{S'(x_0) = f'_0, \quad S'(x_n) = f'_n} \quad \longrightarrow \quad \boxed{s'_1(x_0^+) = f'_0, \quad s'_n(x_n^-) = f'_n}$$

可得: $\boxed{2M_0 + M_1 = \dfrac{6}{h_1}(f[x_0, x_1] - f'_0), \quad M_{n-1} + 2M_n = \dfrac{6}{h_n}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n])}$.

令 $d_0 = \dfrac{6}{h_1}(f[x_0, x_1] - f'_0)$, $d_n = \dfrac{6}{h_n}(f'_n - f[x_{n-1}, x_n])$, 与前面 $n-1$ 个方程联立可得

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

(严格对角占优)

(2) 第二类边界条件: 指定两端点处的二阶导数

$$\boxed{S''(x_0) = f_0'', \quad S''(x_n) = f_n''} \quad \longrightarrow \quad \boxed{M_0 = f_0'', \quad M_n = f_n''}$$

(2) 第二类边界条件: 指定两端点处的二阶导数

$$\boxed{S''(x_0) = f_0'', \quad S''(x_n) = f_n''} \quad \longrightarrow \quad \boxed{M_0 = f_0'', \quad M_n = f_n''}$$

可得方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - \mu_1 f_0'' \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n'' \end{bmatrix}$$

(严格对角占优)

(3) 第三类边界条件: 要求 $S(x)$ 是周期函数

$$\boxed{S'(x_0^+) = S'(x_n^-), \quad S''(x_0^+) = S''(x_n^-)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{s_1'(x_0^+) = s_n'(x_n^-), \quad s_1''(x_0^+) = s_n''(x_n^-)}$$

(3) 第三类边界条件: 要求 $S(x)$ 是周期函数

$$\boxed{S'(x_0^+) = S'(x_n^-), \quad S''(x_0^+) = S''(x_n^-)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{s_1'(x_0^+) = s_n'(x_n^-), \quad s_1''(x_0^+) = s_n''(x_n^-)}$$

可得 $\boxed{\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n, \quad M_0 = M_n}$

其中 $\lambda_n = \dfrac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \mu_n = \dfrac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad d_n = \dfrac{6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n])}{h_1 + h_n}.$

(3) 第三类边界条件: 要求 $S(x)$ 是周期函数

$$\boxed{S'(x_0^+) = S'(x_n^-), \quad S''(x_0^+) = S''(x_n^-)} \quad \longrightarrow \quad \boxed{s_1'(x_0^+) = s_n'(x_n^-), \quad s_1''(x_0^+) = s_n''(x_n^-)}$$

可得 $\boxed{\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n, \quad M_0 = M_n}$

其中 $\lambda_n = \dfrac{h_0}{h_0 + h_{n-1}}, \quad \mu_n = \dfrac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}}, \quad d_n = \dfrac{6(f[x_0, x_1] - f[x_{n-1}, x_n])}{h_1 + h_n}.$

方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

(严格对角占优)

三弯矩方程

由于 M_k 在力学中解释为细梁在 x_k 截面处的弯矩, 因此前面的方程组在工程中称为**三弯矩方程**.

具体计算过程

由上面的分析可知, 三次样条插值的具体计算过程如下:

(1) 根据给定的插值条件和边界条件写出关于 $M_0, M_1, \ldots, M_n$ 的线性方程组;

(2) 解线性方程组, 求得 M_k;

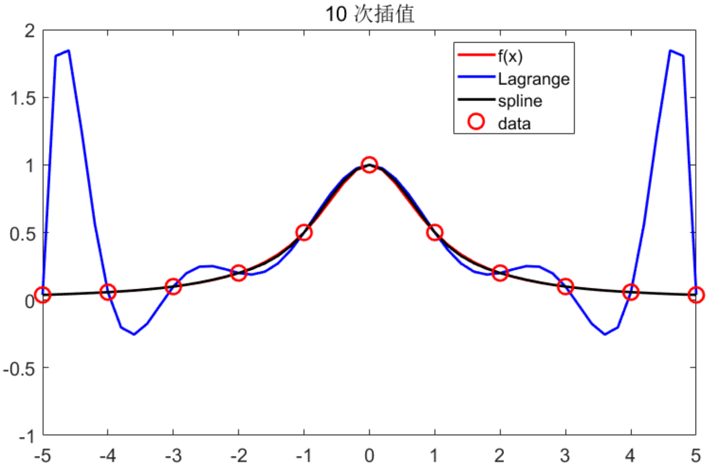
(3) 将 M_k 代入 $s_k(x)$ 的表达式, 得到 $S(x)$ 在插值区间 $[a, b]$ 上的分段表达式.

三次样条插值的优点: 二阶连续可导, 且只需利用插值节点上的函数值, 加上边界条件.

例 函数 $f(x)$ 定义在 $[27.7, 30]$ 上, 插值节点及相应函数值下表, 试求三次样条插值多项式 $S(x)$, 满足边界条件 $S'(27.7) = 3.0$, $S'(30) = -4.0$. (`Interp_spline_01.m`)

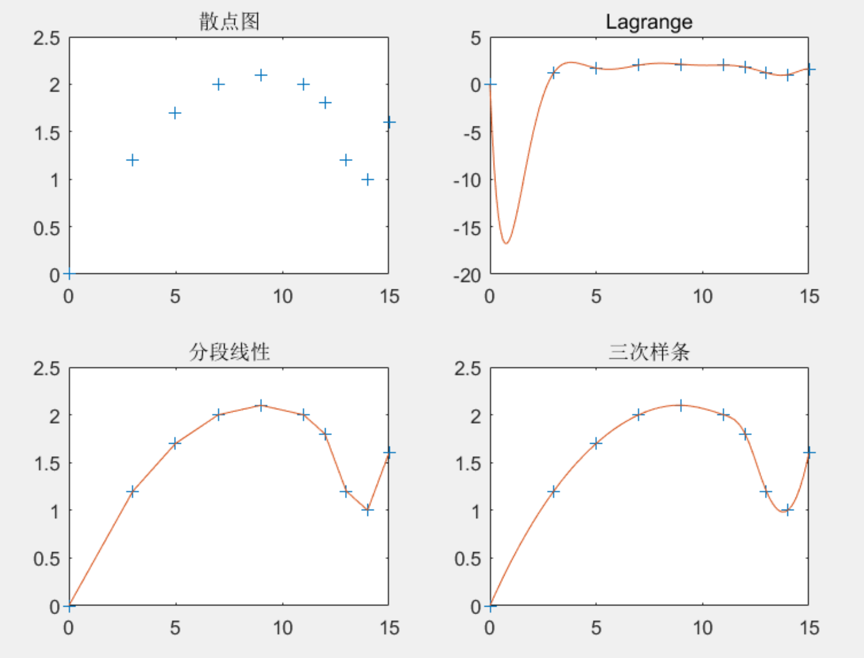
x	27.7	28	29	30
$f(x)$	4.1	4.3	4.1	3.0

例 函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 插值区间 $[-5,5]$, 取 11 个等距节点 (10 等分), 试画出 10 次插值多项式 $L_{10}(x)$ 与三次样条插值多项式 $S(x)$ 的函数图形. (Interp_spline_02.m)



例 机床加工. 待加工零件的外形根据工艺要求由一组数据 (x, y) 给出, 用程控铣床加工时每一刀只能沿 x 方向和 y 方向走非常小的一步, 这就需要从已知数据得到加工所要求的步长很小的 (x, y) 坐标. 下表中给出的 x, y 数据位于机翼断面的下轮廓线上, 假设需要得到 x 坐标每改变 0.1 时的 y 坐标. 试完成加工所需数据, 画出曲线. 要求用 Lagrange, 分段线性和三次样条三种插值方法计算. (Interp_spline_03.m)

x	0	3	5	7	9	11	12	13	14	15
y	0	1.2	1.7	2.0	2.1	2.0	1.8	1.2	1.0	1.6


散点图
Lagrange
分段线性
三次样条

6-6-4 误差估计

定理 设 $f(x) \in C^4[a,b]$, $S(x)$ 为满足第一类或第二类边界条件的三次样条函数, 则

$$\max_{a\le x\le b} |f(x)-S(x)| \le \frac{5}{384} \max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)| h^4,$$

$$\max_{a\le x\le b} |f'(x)-S'(x)| \le \frac{1}{24} \max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)| h^3,$$

$$\max_{a\le x\le b} |f''(x)-S''(x)| \le \frac{3}{8} \max_{a\le x\le b} |f^{(4)}(x)| h^2,$$

其中 $h = \max\limits_{0\le k\le n-1} \{h_k\}$. (证明可参见相关资料)

✍ 该定理说明, 当 $h \to 0$ 时, $S(x)$ 及其一阶导数 $S'(x)$ 和二阶导数 $S''(x)$ 均收敛到 $f(x)$ 及其一阶导数 $f'(x)$ 和二阶导数 $f''(x)$.

谢谢

THANK YOU