

第四周作业：分段插值、三次样条插值 共 5 题

练习 4.1 求一个次数不超过 4 的多项式 $p(x)$, 满足

$$p(0) = p'(0) = 0, \quad p(1) = p'(1) = 1, \quad p(2) = 1.$$

(提示: 可使用非标准的插值计算方法, 采用一些技巧, 避免死算)

练习 4.2 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, 在 $[-5, 5]$ 上取 n 等分点做分段线性插值. 试估计 $n = 10$ 时的整体误差限, 并计算此时 $f(x)$ 和 $I_h(x)$ 在各小区间中点处的值 (保留 3 位有效数字). (要求: 1. 写出 $I_h(x)$ 在各个小区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 上的通项表达式即可; 2. 以表格方式列出 $I_h(x)$ 和 $f(x)$ 在各小区间中点处的函数值)

练习 4.3 求 $f(x) = x^4$ 在 $[a, b]$ 上分段三次 Hermite 插值函数 $I_h(x)$, 并估计误差.

练习 4.4 给定数据表如下:

x_k	0.25	0.30	0.39	0.45	0.53
y_k	0.5000	0.5477	0.6245	0.6708	0.7280

试求三次样条插值函数 $S(x)$, 满足 $S''(0.25) = S''(0.53) = 0$.

练习 4.5 设 $f(x) \in C^2[a, b]$, $S(x)$ 是三次样条函数.

(1) 证明:

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f''(x)]^2 dx - \int_a^b [S''(x)]^2 dx \\ &= \int_a^b [f''(x) - S''(x)]^2 dx + 2 \int_a^b S''(x)[f''(x) - S''(x)] dx \end{aligned}$$

(2) 取节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, 若 $S(x_k) = f(x_k)$, 证明:

$$\int_a^b S''(x)[f''(x) - S''(x)] dx = S''(b)[f'(b) - S'(b)] - S''(a)[f'(a) - S'(a)]$$